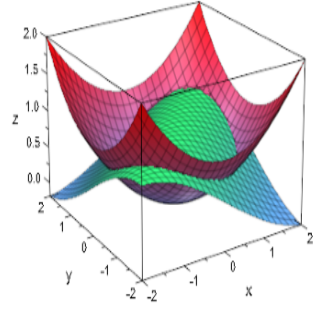
AZƏRBAYCAN DÖVLƏT NEFT VƏ SƏNAYE UNİVERSİTETİ

MƏMMƏDOV N.Y, MUSAYEV Ə.M.

ALİ RİYAZİYYAT KURSU

I hissə







BAKI-2016

BAKI-2017

AZƏRBAYCAN DÖVLƏT NEFT VƏ SƏNAYE UNİVERSİTETİ

MƏMMƏDOV N.Y, MUSAYEV Ə.M.

ALİ RİYAZİYYAT KURSU

I hissə

(Dərs vəsaiti)

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye

Universiteti təsdiqetmişdir. Əmr№

BAKI-2017

UDK 512 (075.8)

**Tərtib edənlər:** texnika elmlər namizədi, dosent N.Y.Məmmədov, riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent Ə.M.Musaev “Ali riyaziyyat kursu (I hissə)”

**Redaktoru**:fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,

dosent Ə.S.Həsənov

**Rəy verənlər:1.**Azərbaycan Dövlət Pedaqoji

Universitetinin “Riyazi analiz”

kafedrasının dosenti, fizika-

riyaziyyat elmləri doktoru

B.Ə.Əliyev

**2**. ADNSU-nun “Ümumi və tətbiqi

riyaziyyat” kafedrasının dosenti,

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Ə.S.Həsənov

Təqdim olunmuş dərs vəsaiti ali texniki universitetlərin bakalavr və magistr hazirliğında

istifadə üşün nəzərdə tutulmuşdur.

**ÖN SÖZ**

Dünyanın inkişaf etmiş ölkələrinə inteqrasiya olunan respublikamızda elmin inkişaf etdirilməsi və gənc nəslin dərin biliklərə yiyələnməsi üçün ali məktəblərdə təhsilin kredit sistemənə keçilməsinin böyük əhəmiyyəti vardır. Bu isə respublikamızın ali texniki məktəblərinin tələbələri üçün yeni dərsliklərin, dərs vəsaitlərinin yazılıb nəşr etdirilməsini aktual edir.

Oxuculara təqdim olunan “ ALİ RİYAZİYYAT KURSU “

I hissə dərsliyi müəlliflərin uzun illər Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin “Ali riyaziyyat“ hazırda “Ümumi və tətbiqi riyaziyyat“ kafedrasında oxuduqları mühazirələrə əsaslanaraq yazılmışdır. Dərsliyin həcminin məhdudluğunu nəzərə alaraq riyaziyyat kursunun materialları kifayət qədər yığcam və çox sadə dildə yazılmışdır. Dərslikdə mətnlə bərabər çoxlu sayda qrafiklərdən istifadə edilmişdir, bu isə öz növbəsində öyrənilən materialların daha əyani olması və yaxşı yadda qalmasına köməklik edir. Dərsliyin yazmağın əsas məqsədlərindən biri tələbələri mühazirə yazmaqdan mümkün qədər azad edib, onlara kitab üzərində sərbəst işləmək vərdişi yaratmaq və nəticə etibarilə tələbələrdə ətraf mühiti dərk etmək qabiliyyəti aşılamaqdır. Kitabın həcminin çoxda böyük olmamasını və texniki universtetlərdə təhsilin bakalavr səviyyəsi üçün tədris proqramını əsas götürərək müəlliflər bir sıra nəzəri məsələlərin geniş izahını və daha mürəkkəb teoremlərin isbatını verməmişdilər.Bu deyilənləri nəzərə alaraq mürəkkəb nəzəri materialların daha dərindən mənimsənilməsini təmin etmək məqsədilə, həlli ilə müşaiət olunan nümunəvi misallardan daha geniş istifadə olunmuşdur.

Baxmayaraq ki, son illər bakalavr təhsil forması üçün ümumi riyaziyyat kursuna dair çoxlu sayda dərs vəsaitləri, dərsliklər yazılaraq tələbələrin istifadəsinə verilmişdir, lakin yeni dərsliyin yazılmasına ehtiyac vardır. Çünki riyaziyyat elmi müasir və gələcək texnikanın yaradılmasının nəzəri əsasını təşkil edir. Ona görə də daha sadə dildə, dolğun məzmuna malik olan yeni dərs vəsaitinin yazılmasının böyük əhəmiyyəti vardır.

Ali texniki məktəblərin tədris proqramına uyğun olaraq yazılmış bu kitab üç bölmədən ibarətdir:

Xətti cəbrin və analitik həndəsənin elementləri;

Birdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı;

Çoxdəyişənli funksiyanın diferensial hesabı.

Kitabın birinci bölməsi tələbələr üçün birinci semestrdə oxunan «Xətti cəbrin və analitik həndəsənin elementləri» adlı bölməsinin məzmununu əhatə edir. Burada matrislər və determinantlar, xətti tənliklər sistemi və onların müxtəlif həll üsulları, vektorlar cəbri, müstəvi üzərində düz xətlər, müstəvi tənlikləri, fəzada düz xətlər, düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti və ikitərtibli əyrilərin sadə növləri şərh olunmuşdur. Birinci semestrin proqramının ikinci bölməsinə uyğun «Birdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı» bölməsində isə analizin başlanğıcı, funksiyanın törəməsi və törəmə vasitəsilə funksiyanın araşdırılması verilmişdir. Kitabın üçüncü, «Çoxdəyişənli funksiyanın diferensial hesabı» bölməsində çoxdəyişənli funksiya, onun limiti və kəsilməzliyi, çoxdəyişənli funksiyanın törəməsi və diferensialı, istiqamət üzrə törəmə və qradiyent, səthə toxunan müstəvi və toxunan və normal çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu şərh olunmuşdur.

Ali texniki məktəblərin tələbələri üçün yazılmış bu kitabın, tələbata cavab verəcəyinə və tələbələrin, eləcə də riyaziyyat elmi ilə məşğul olanların marağına səbəb olacağına ümid edirik.

Baxmayaraq ki, dərs vəsaiti ADNSU-nin tələbələri üçün yazılmışdır, ondan digər ali texniki məktəb tələbələri də istifadə edə bilərlər.

Kitabda nöqsanların və texniki səhvlərin olması mümkündür. Bunların aradan qaldırılması üçün təklifini verən hər bir oxucuya əvvəlcədən minnətdarlığımızı bildiririk.

**XƏTTİ CƏBRİN ELEMENTLƏRİ VƏ ANALİTİK HƏNDƏSƏ**

**§1. Matrislər və determinantlar**

**1. Matrislər və onlar üzərində əməllər**

Tutaq ki, və natural ədədlərdir. sayda



ədədlərindən düzbucaqlı şəklində düzəldilmiş cədvələ ()-ölçülü matris deyilir. sayda sətri və sayda sütunu olan ()-ölçülü matris və s. şəklində işarə olunur. Matrisləri adətən böyük ,... hərfləri ilə işarə edirlər. Məsələn



(1)



ədədlərinə matrisin elementləri deyilir. () indekslərin birincisi () onun yerləşdiyi sətrin nömrəsini, ikincisi () isə yerləşdiyi sütunun nömrəsini göstərir. (1) matrisində olduqda, ona kvadrat matris deyilir. Bu halda ədədinə kvadrat matrisin tərtibi deyilir və kimi işarə olumur. Məsələn: iki tərtibli kvadrat matris, isə üç tərtibli kvadrat matrisdir.



Ancaq bir sətri olan matrisə sətir-matris, ancaq bir sütunu olan matrisə sütun-matris deyilir. Məsələn: matrisləri sətir-matrislər, matrisləri isə sütun matris­lərdir.



tərtibli matrisin sol yuxarı küncündə yerləşən elementi ilə sağ aşağı küncündə olan elementini birləşdirən düz xətt parçası baş diaqonal, bu xətt parçası üzərində yerləşən elementləri çoxluğu həmin matrisin baş diaqonal elementləri adlanır. tərtibli matrisin sağ yuxarı küncündə yerləşən elementi ilə sol aşağı küncündə olan elementini birləşdirən düz xətt parçası yan diaqonal, bu xətt parçası üzərində yerləşən elementləri çoxluğu həmin matrisin yan diaqonal elementləri adlanır. Yalnız baş diaqonalının elementləri sıfırdan fərqli ola bilən kvadrat matrisə diaqonal matris deyilir və belə işarə olunur:.



Bütün baş diaqonal elementləri vahidə bərabər olan diaqonal matrisə vahid-matris deyilir və kimi işarə olunur. Kvadrat matrisin diaqonal elementlərinin bir tərəfində ya yuxarıda və yaxud aşağıda duran bütün elementləri sıfır olan matris ücbucaq matris adlanır:



və ya .



Bütün elementləri sıfra bərabər olan kvadrat matrisə sıfır matris deyilir. Matrisin bütün sətir və sütunlarının yerinin dəyişilməsinə (nömrəsini saxlamaqla) həmin matrisin transponirə edilməsi deyilir və ilə işarə olunur. Məsələn,



.



olduqda matrisinə simmetrik matris deyilir. (1) matrisinin simmetrik olması şərtini kimi yazmaq olar.



Eyni ölçülü və bütün uyğun elementləri bərabər olan matrislərə bərabər matrislər deyilir.

Eyni ()-ölçülü və matrislərin cəmi həmin ölçülu və hədləri



kimi təyin olunan matrisinə deyilir və ilə işarə olunur. Məsələn,



Eyni ölçülü və matrislərinin fərqi həmin ölçülü elə matrisinə deyilir ki, onu ilə topladıqda ya bərabər olsun: . və matrisinin fərqi ilə işarə olunur.



Verilmiş matrisinin həqiqi ədədinə hasili, hədləri kimi təyin olunan matrisinə deyilir və (və ya ) ilə işarə olunur. Məsələn:



.



Iki matrisin hasilini təyin edək. ()-ölçülü matrisinin ()-ölçülü matrisinə hasili, hədləri



kimi təyin olunan ()-ölçülü matrisinə deyilir və ilə işarə olunur. Xüsusi halda,



olarsa,



.



Məsələn, matrisi ölçülü, matrisi isə ölçülü olduqda matrisi ölçülü matris olar.



**Misal 1.** olarsa, hasilini tapın.



**Həlli:**



Xüsusi halda, hər bir kvadrat matrisini özünü- özünə vursaq, həmin matrisin kvadratını, kubunu və s. almaq olar:



Matrislərin vurulması üçün ümimiyyətlə yerdəyişmə qanunu doğru deyil. Tərifdən aydındır ki, istənilən ölçülü iki matrisi bir-birinə həmişə vurmaq olmaz və onları bir-birinə vurmaq mümkün olduqda isə ola bilər.



**2. Determinantlar və onların xassələri**

İkitərtibli matrisinin elementlərindən düzəldilmiş fərqinə **ikitərtibli determinant** və ya verilmiş matrisin determinantı deyilir və kimi simvollardan biri ilə işarə edilir. Tərifə əsasən yaza bilərik.



(1)



elementlərinə determinantın baş diaqonal, elementlərinə isə yan diaqonal elementləri deyilir. İki tərtibli matrisinin determinantını hesablamaq üçün baş diaqonal elementlərinin hasilindən yan diaqonal elementlərinin hasilini çıxmaq lazımdır.



Məsələn, .



Üçtərtibli matrisinin elementlərindən düzəldilmiş ifadəsinə **üçtərtibli determinant** deyilir və



kimi işarə olunur. Tərifə əsasən

(2)



yaza bilərik.

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki ifadəyə determinantın açılışı (və ya qiyməti) deyilir. Üçtərtibli determinantın hesablanma qaydasını aşağıdakı iki sxemdən almaq olar:



-



+

(2) bərabərliyinin sağ tərəfinə daxil olan müsbət işarəli üç həddin birincisi matrisinin baş diaqonal elementlərinin hasili, ikinci və üçüncü hədləri isə uyğun olaraq oturacaqları baş diaqonala paralel olan üçbucaqların təpə nöqtələri üzərində olan elementlərinin hasilinə bərabərdir, (2) bərabərliyinə daxil olan mənfi işarəli üç həd isə yan diaqonala nisbətən oxşar qayda ilə yazılır.



Bu qayda üçtərtibli determinantları hesablamaq üçün üçbucaq qaydası adlanır. Məsələn,

.



Üçtərtibli determinantın hesablanma qaydasını yadda saxlamaq üçün aşağıdakı Sarryus üsulundan da istifadə etmək etmək daha asan olur. Bunun üçün üçtərtibli determinantın elementləri yanina birinci iki sütun elementlətini sağdan əlavə yazsaq, müsbət işarəli və mənfi işarəli ifadələrin qiymətlərini isə aşağıdakı sxemdən istifadə edərək hesablamaq olar:

-

-

-

+

+

+



Buradan görünür ki, üstlərindən düzxətlər çəkilmiş elementlərin mümkün hasilləri, bu düzxətlər baş diaqnola paralel götürüldükdə müsbət işarə ilə, yan diaqnola paralel olduqda isə mənfi işarə ilə götürülür.

İndi tərtibl



(3)



matrisinin determinantına baxaq.

Determinantın hər hansı elementinin yerləşdiyi sətir və sütun üzərindən düz xətlər çəkdikdə yerdə qalan elementlər (nisbi vəziyyətlərinini dəyişmədən) tərtibi verilmiş determinantın tərtibindən bir vahid az olan determinant əmələ gətirir. Bu determinanta kəsişmədə duran uyğun elementin **minoru** deyilir. elemntinin minorunu ilə işarə edirlər. minorunun vuruğu ilə hasilinə elementinin **cəbri tamamlayıcısı** deyilir və ilə işarə olunur.



Üç tərtibli

(4)



determinantının və elementlərinin minoru uyğun olaraq və cəbri tamamlayıcıları isə və olar.



(3) matrisinin birinci sətir elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcıları olsun.



**Tərif.** kimi təyin olunan ədədə (3) matrisinin  **tərtibli determinantı** deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur.



(5)



tərtibli determinanta verilən bu tərif induktiv tərifdir. Yəni tərtibli determinant tərtibli determinantla, tərtibli determinant tərtibli determinantla və s. dördtərtibli determinant üçtərtibli determinatla təyin olunur.



**Teorem.** tərtibli determinantın qiyməti onun hər hansı sətir və ya sütun elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcılarına hassillərinin cəminə bərabərdir.



və ya



.



**Determinantın aşağıdakı xassələri vardır:**

**Xassə 1.** Determinantın uyğun sətirləri ilə sütunlarının

yerini dəyişdikdə onun qiyməti dəyişməz.

**Nəticə.** Hər bir determinantın sətirləri ilə sütunları eyni

hüquqludur.Yəni sətrə aid olan xassə eyni

zamanda sütunada aid olur.

**Xassə 2.** Determinantın iki sətrinin və ya iki sütunun bir-biri ilə yerini dəyişdikdə, onun ancaq işarəsi dəyişər.

**Xassə 3.** İki sətri və ya iki sütunu eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

**Xassə 4.** Determinantın hər hansı bir sətrinin və ya sütunun bütün elementlərinin ortaq vuruğunu determinant işərəsi xaricinə cıxarmaq olar.

**Xassə 5.** Determinantın mütənasib olan sətirləri və ya sütunları varsa, bu determinantın qiyməti sıfra bərabərdir.

**Xassə 6.** Determinantın hər hansı bir sətir və ya sütununun bütun elementləri sıfra bərabərdirsə, bu determinantın qiyməti sıfra bərabərdir.

**Xassə 7.** Determinantın hər hansı bir sətrinin bütün elementləri iki ədədin cəmi kimi verildikdə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabər olar, bu determinantların birində həmin sətir elementləri olaraq birinci toplananlar, o birində isə həmin sətir elementləri olaraq ikinci toplananlar götürülür.

**Xassə 8.** Determinantın hər hansı sətrinin və ya sütunun bütun elementlərini bir ədədə vurub, digər bir sətir və ya sütun üzərinə əlavə etsək, determinantın qiyməti dəyişməz.

**Xassə 9.** - tərtibli determinantın hər hansı sətrinin və ya sütunun bütun elementlərini, digər bir sətir və ya sütun elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəmi sıfra bərabərdir.



və ya



.



**3.Tərs matris**

Tutaq ki, hər hansı tərtibli kvadrat matris və həmin tərtibli vahid matrisdir. Bu halda



(1)



bərabərliyini ödəyən kvadrat matrisinə matrisinin tərsi deyilir və ilə işarə edilir. Deməli, və onun tərsi olan matrisləri bərabərliyini ödəyir. matrisinin determinantı olsun. Determinantı sıfra bərabər olan kvadrat matrisinə cırlaşmış (və ya məxsusi) matris deyilir. Determinantı sıfra bərabər olmayan kvadrat matrisinə isə cırlaşmamış (və ya qeyri-məxsusi) matris deyilir.



**Teorem 1**. Kvadrat matrisinin tərs matrisi olması üçün onun determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafidir.



tərtibli kvadrat



matrisinin tərs matrisi



düsturu ilə tapılır. Burada ilə matrisinə uyğun determinantın elementinin cəbri tamamlayıcısı işarə olunmuşdur. Bilavasitə yoxlamaq olar ki, bərabərliyi doğrudur.



**Teorem 2**. Kvadrat matrisinin tərsi varsa, bu yeganədir.



**İsbatı**. Tutaq ki, matrisinin və kimi iki tərs matrisi vardır, onda bərabərliyinin, hər iki tərəfini matrisinə vurduqda



(2)



bərabərliyi alınır. Digər tərəfdən,

(3)



olar. (2) və (3) bərabərliklərindən alınır.



**Misal 2.** matrisin tərs matrisini tapın.



**Həlli.** Matrisin elementlərindən düzəldilmiş determinant olduğuna görə, matrisi cırlaşmayandır və onun tərs matrisi var:



düsturuna əsasən tərs matrisi tapaq



olduğundan

olar.



Bəzi hallarda tərs matrisi tapmaq üçün **matrisin elementar çevirmələri** adlanan, aşağıdakı çevirmələrdən istifadə olunur:

a)Matrisin sətirlərinin (sütunlarının) yerini dəyişmək;

b)Matrisin sətrini (sütununu) sıfırdan fərqli ixtiyarı ədədə vurmaq və ya bölmək;

c)Matrisin hər hansı bir sətrini (sütununu) bir ədədə vurub başqa bir sətrin (sütunun) üzərinə əlavə etmək.

tərtibli matrisinin tərs matrisini tapmaq üçün onun sağ tərəfində vahid matrisi yazsaq alınan ölçülü düzbucaqlı matrisinin yalnız sətirləri üzərində elementar çevirmələr aparmaqla matrisini matrisinə, yəni çevirməsini yerinə yetirmək lazımdır. matrisi cırlaşmamış olarsa, bu çevirməni həmişə yerinə yetirmək olar.



Bu zaman alınan matrisi -nın tərs matrisi olur.



Məsələn, matrisinin tərsini elementar çevirmə vasitəsilə tapın.



.



**4. Matrisin ranqı və onun tapılma üsulları.**

Tutaq ki, ölçülü



matrisi verilmişdir. Bu matrisin şərtini ödəyən ixtiyarı sayda sətri ilə sayda sütununun kəsişməsində duran elementlərindən düzəldilmiş tərtibli determinanta matrisinin  **tərtibli minoru** deyilir.



Məsələn,



kimi ölçülü düzbucaqlı matrisinin üç tərtibli bir minorunu yazaq.



.



Burada -in indeksləri uyğun olaraq matrisdə seçilmiş sətir və sütunların nömrələridir. Göründüyü kimi matrisinin müxtəlif tərtibli minorları çoxdur. Biz burada onun ancaq üçtərtibli bir minorunu yazdıq.



**Tərif.**  matrisinin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibinə bu matrisin **ranqı** deyilir.



matrisinin ranqı, kimi işarə olunur və bərabərsizliyini ödəyir.



Qeyd etmək lazımdır ki, matrisin ranqı -ə bərabərdirsə, onda bu matrisin tərtibi -dən böyük olan bütün minorları sıfra bərabərdir.



**Tərif.** Ranqı-ə bərabər olan matrisinin sıfırdan fərqli ixtiyarı tərtibli minoru bu matrisin bazis minoru adlanır.



**Teorem .** (Bazis minoru haqqında teorem). Bazis sətirləri (sütunları) xətti asılı deyildir. matrisinin istənilən sətri (sütunu) onun bazis sətirlərinin (sütunlarının) xətti kombinasiyasıdır.



Matrisin ranqını hesablamaq üçün üç üsuldan istifadə edirlər.

**Birinci üsulda** tərifdən istifadə edərək seçmə yolu ilə matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minoru tapılır. Lakin bu üsuldan istifadə etmək xeyli vaxt tələb edə lilər.

**Misal 3.** matrisinin ranqını tapın.



**Həlli.**



olduğundan onun ranqı .



**Misal 4.**  matrisinin ranqını tapın.



**Həlli.**



matrisinin bütün üçtərtibli minorları sıfra bərabərdir. Lakin onun ikitərtibli minoru olduğuna görə -yə bərabərdir.



Matrisin ranqına bəzən aşağıdakı kimi də tərif verilir.

**İkinci üsul.** Matrisin ranqını hesablamağın **ikinci üsulu** aşağıdakı teoremə əsaslanır:

**Teorem.**Matrisinelementar çevirmələri nəticəsində onun ranqı dəyişmir.

Matrislər üzərində aparılan elementar çevirmələrin tərifi yuxarıda qeyd olunmuşdur.

Elementar çevirmələr vasitəsilə hər bir matrisi diaqonal şəklə qətirmək olar. Aydındır ki, diaqonal şəklində olan hər bir matrisin ranqı baş diaqonalda olan sıfırdan fərqli elementlərin sayına bərabərdir. Matrisi diaqonal şəklə gətirməkdən onu **pilləli şəklə** salmaq daha asandır.

Pilləli şəkildə olan matris elə matrisə deyilir ki, ikinci sətirdən başlayaraq hər bir sətirin sıfırdan fərqli ilk elementin sütun nömrəsi, özündən əvvəlki sətirdə sıfırdan fərqli ilk elementin sütun nömrəsindən 1 vahid böyük olsun. Məsələn,



matrisi pilləli şəkildədir. Ona görə də pilləli şəkildə matrisin ranqı onun sıfırdan fərqli sətirlərinin sayına bərabərdir.

**Tərif.** Matrisin xətti asılı olmayan sətirlərinin (sütunlarının) maksimal sayına matrisin ranqı deyilir.

**Misal 5.**  matrisinin ranqını tapmalı.



**Həlli.** Bu matris üzərində elementar cevirmə aparaq. Birinci sətiri 2-yə və 5-ə vurub, uyğun olaraq 2-ci və 3-cü sətrlərdən çıxaq və alınan yeni matrisdə 3-cü sətrdən ikinci sətri çıxaq:



Buradan isə alarıq.



Lakin bunu çox asanlıqla diaqonal şəklə gətirmək olar, bunun üçün birinci sütunu ədədlərinə vurub uyğun olaraq 2-ci, 3-cü, 4-cü, 5-ci sütunların üzərinə gəlib, birinci sətrin -dən başqa qalan elementlərini sıfra çevirmək, sonra isə alınan matrisdə 2-ci sütunu müvafiq ədədlərə vurub, uyğun olaraq 3-cü, 4-cü, 5-ci sütunların üzərinə əlavə edib:



matrisini alarıq. Burada vahidlərin sayı 2-yə bərabər olduğuna görə ranq .



Bəzən ranqı hesabladıqda eyni bir misalda həm birinci, həm də ikinci üsulu tətbiq etməklə daha tez məqsədə nail olmaq olur. Belə ki, verilən matris üzərində əvvəlcə bir sıra elementar çevirmələr aparıb sadələşdirdikdən sonra asanlıqla onun sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunu hesablayırlar.

**Misal 6.** matrisinin ranqını tapmalı.



**Həlli.**



.



Axırıncı matrisdən olduğundan ranq olar.



**Üçüncü üsul**. Bu üsul bürüyən (yaxud əhatə edən) minorlar üsulu adlanır.

Tutaq ki, verilmiş matrisdə sıfırdan fərqli tərtibli minoru tapılmışdir.Yalnız minorunu özündə saxlayan (yaxud əhatə edən) tərtibli minorlara baxaq:əgər bu minorların hamısi sıfra bərabər olarsa, onda verilmiş matrisin ranqı ya bərabər olur. Əks halda minorunu əhatə edən tərtibli minorlar içərisində sıfirdan fərqli minor var və onda, əvvəlki bənd yenidən təkrar olunur.



**Misal 7**. Matrisin ranqını tapın.



**Həlli:** matrisindən sıfirdan fərqli ikitərtibli minorunu və bu minoru özündə saxlayam minorunu seçək.



. Seçilmiş minoru sıfırdan fərqlidir:



. minorunu əhatə edən



minoruda sıfırdan fərqlidir. Lakin bu minoru əhatə edən dördtərtibli minorların hər biri sıfra bərabər olduğuna görə matrisin ranqı üçə bərabərdir:



**§2. Xətti tənliklər sistemi və onların həlli**

**1. Xətti tənliklər sistemi**

Aşağıdakı xətti tənliklər sisteminə baxaq

(1)



burada həqiqi əmsallar, sərbəst hədlər, axtarılan məchullardır. (1) xətti tənliklər sistemində olduqda, ona **xətti bircinsli** **tənliklər**  **sistemi**, sərbəst hədlərdən heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda isə ona **xətti** **bircinsli** **olmayan tənliklər** **sistemi** deyilir.



**Tərif.**  məchullarının yerinə uyğun ola­raq ədədlərini yazdıqda (1) sisteminin hər bir tənliyi doğru ədədi bərabərliyə çevrilərsə, onda ədədlər çoxluğuna, sistemin **həlli** deyilir.



Həlli olan sistemə uyuşan (birgə), həll olmayan sistemə isə uyuşmayan (birgə olmayan) sistem deyilir. Uyuşan sistemin bir və ya birdən çox həlli ola bilər.

Əgər uyuşan sistemin bir həlli varsa, ona müəyyən, birdən çox həlli varsa, ona qeyri-müəyyən sistem deyilir.

1. sisteminin məchullarının əmsallarından düzəlmiş matrisi

(2)



ilə, matrisinə tənliklərin sağ tərəfindəki sərbəst hədlərdən ibarət olan sütunu əlavə etməklə alınan matrisi isə



(3)



ilə işarə edək. matrisinə (1) sisteminin əsas matrisi, matrisinə isə sistemin genişlənmiş matrisi deyilir.



(1) sisteminin həllinin olub-olmamasını aşağıdakı teorem ilə müəyyən etmək olar.

**Kroneker-Kapelli teoremi**. (1) xətti tənliklər sisteminin həllinin olması üçün həmin sistemin əsas matrisinin ranqının genişlənmiş matrisinin ranqına bərabər olması zəruri və kafidir.

**Misal 1.** Verilmiş xətti tənliklər sisteminin həllinin olub-olmadığını araşdırın.



**Həlli.** Sistemin əsas matrisinin və genişlənmiş matrisinin ranqını tapaq:

,



matrisinin 2-ci sətrinin elementlərinin üzərinə 3-cü sətrin uyğun elementlərini əlavə edək. İkinci sətrin bütün elementlərini 3-ə bölək və 2-ci sətrin elementltrindən 1-ci sətrin uyğun elementlərini çıxaq.



Buradan görünür ki, sistemin matrisinin ranqı 2-yə, genişlənmiş matrisinin ranqı 3-ə bərabərdir.

Kranoker-kapelli teoreminə əsasən sistemin həlli yoxdur.

**Misal 2.** Verilmiş xətti tənliklər sisteminin həllinin olub-olmadığını araşdırın.



**Həlli.** Sistemin genişlənmiş matrisini yazıb, sətirlər üzərində çevirmələr aparaq:



Görünür ki, sistemin matrisinin və həm də genişlənmiş matrisinin ranqı 3-ə bərabərdir. Deməli verilmiş sistem uyuşandır. Sistemin matrisinin ranqı məchulların sayından kiçik olduğu üçün onun sonsuz sayda həlli var.

**2. Xətti tənliklər sisteminin Kramer qaydası ilə həlli**

(1) sistemində məchulların sayı tənliklərin sayına bərabər olduqda həmin sistemin həlli Kramer qaydası ilə tapılır. Tənliklərin sayı məchulların sayına bərabər olan aşağıdakı sistemə baxaq



(4)



Bu sistemin əmsallarından və sərbəst hədlərindən aşağıdakı determinantları düzəldək.



determinantına (4) sisteminin əsas determinantı deyilir. Sistemin əsas determinantında ardıcıl olaraq -ci sütunu sərbəst hədlərdən ibarət olan sütunla əvəz etdikdə alınan determinantları () ilə işarə etsək:



, , … ,



. (5)



**Kramer teoremi.** (4) xətti tənliklər sisteminin əsas determinantı olduqda, onun yeganə həlli var, bu həll



(6)



düsturları ilə tapılır.

Bu düsturlara Kramer düsturları, həllin bu qayda ilə tapılmasına isə Kramer qaydası deyilir.

**Misal 3.** Xətti tənliklər sistemini Kramer qaydası ilə həll edin:



**Həlli.** Sistemin əsas determinantını hesablayaq:



olduğundan Kramer düsturlarını tətbiq etmək olar.

,



, , .



**Qeyd.** Tutaq ki, (4) sistemində ranq-dir. Ümumiliyi azaltmadan fərz edək ki, matrisinin sıfırdan fərqli tərtibli bazis minoru onun sol yuxarı küncündə yerləşir. Onda (4) sistemi



(7)



sisteminə ekvivalent olar.

Deməli həmin sayda sətir bazis sətirləridir və qalan sətirlər bunların xətti kombinasiyasıdır, onlar atılır və -dən başlayaraq qalan bütün məchullardan asılı olan ifadə sağ tərəfə keçirilir. Nəticədə determinantı sıfırdan fərqli olan məchullu xətti tənliklər sistemi alınır. Onu Kramer qaydası ilə həll edib, bazis məchulları sərbəst məchulları vasitəsilə tapılır. Burada sərbəst məchullara müxtəlif ədədi qiymətlər verməklə sistemin sonsuz sayda həlli tapılır.



olduqda, (4) sistemi.



(8)



xətti bircinsli tənliklər sisteminə çevrilir.

Bircinsli xətti tənliklər sisteminin həllinin varlığı haqqında aşağıdakı təklifi söyləmək olar. (8) bircinsli sistemin sıfırdan fərqli həllinin olması üçün həmin sistemin əsas determinantının sıfıra bərabər olması zəruri və kafidir. Bu təklifdən alınır ki, əgər sistemin əsas determinantı sıfır­dan fərqlidirsə, onda onun yeganə sıfır həlli vardır. Əgər sistemin deter­inantı sıfıra bərabərdirsə onda onun sıfırdan fərqli həlləri vardır. Bu həlləri tapmaq üçün sistemin sayda (burada sistemin matrisinin ranqıdır) tənliyini götürüb həll etmək lazımdır.



**Misal 4.** xətti bircins tənliklər sistemini həll edin.



**Həlli.**  Verilmiş sistemin əsas determinantı



olduğuna görə onun yeganə sıfır həlli var.



**Misal 5.** xətti bircins tənliklər sistemini həll edin.



**Həlli.** Verilmiş sistemin əsas determinantını hesablayaq.



olduğuna görə tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həlli var.

olduğunu nəzərə alaraq sistemin birinci iki tənliyini götürüb, onu üçməchullu iki xətti bircinsli tənliklər sistemi kimi həll edək.



Buradan həlli alınır. Burada -yə ixtiyarı qiymətlər verməklə, sistemin sonsuz sayda həllərini almaq olar. Bu həllərin hər biri verilmiş sistemin üçüncü tənliyini də ödəyir.



Deməli xətti bircins tənliklər sisteminin sonsuz sayda həlli vardır.

**Misal 6.** Xətti tənliklər sistemini həll edin.



**Həlli.** Sistemini əsas və genişlənmiş matrislərini yazaq:

,



Bu matrislərin ranqları bərabər olduğundan sistemin həlli var. matrisin sol yuxarı küncündəki ikitərtibli minor sıfırdan fərqlidir.



.



Buna görə də həmin minoru bazis hesab etmək olar. Onda bu sistemi

və ya



sisteminə ekvivalent olar. Sistemin həllini Kramer qaydası ilə həll edək.

, .



Burada sərbəst məchuldur. Ona müxtəlif qiymətlər verməklə sistemin sonsuz sayda həllərini almaq olar.



**3. Xətti tənliklər sisteminin matris üsulu ilə həlli**

(4) sisitemində məchulların əmsallarındandüzəlmiş matrisi , sərbəst hədlərdən düzəlmiş sütun-matrisini , məchullardan düzəlmiş sütun-matrisini ilə yəni



, , işarə etsək, onda (4) sistemini matris şəklində



.=



və ya

(9)



şəklində yazmar olar. (9) tənliyi **matris tənlik** adlanır.

Tutaq ki, sistemin əsas determinantı , onda sistemin matrisinin tərs matrisi var, ona görə də (9) bərabərliyinin hər tərəfini soldan matrisinə vursaq



olduğundan



bərabərliyini alarıq.



Buradan olar. Bu həllə verilmiş xətti tənliklər sisteminin **matris həlli** deyilir.



Məlumdur ki, olduqda



olduğundan

bərabərliyi alınar.



Buradan da



həllini alarıq.

**Misal 7.** Xətti tənliklər sistemini matris üsulu ilə həll edin.



**Həlli.** Verilmiş tənliklər sistemini şəklində yazaq:



, , .



Matris tənliyin həlli olduğundan. -matrisini tapaq.



.



Beləliklə,



Buradan da alarıq.



**4. Xətti tənliklər sisteminin Qauss üsulu ilə həlli**

Tutaq ki, (4) xətti tənliklər sistemi verilmişdir. Bu sistemin determinantı sıfırdan fərqli olduqda onu Kramer qaydası ilə həll etmək olar. Lakin bu halda sayda -tərtibli determinant hesablamaq lazım gəlir ki, bu da böyük hesablama tələb edir.



Verilmiş xətti tənliklər sistemində məchulların sayı tənliklərin sayına bərabər olmadıqda, yəni sistem

(10)



şəklində olduqda isə onun həllinə Kramer qaydasını bilavasitə tətbiq etmək olmur.

Buna görə də, (10) (və həm də (4) şəklində xətti tənliklər sistemini çox zaman məchulların **ardıcıl yox edilməsi üsulu** və ya **Qauss üsulu** ilə həll edirlər. Bu üsulun məzmunu belədir.

Tutaq ki, . Onda sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini ədədinə vuraraq, alınan



tənliyini sistemin ikinci tənliyindən tərəf-tərəfə çıxırıq. Aldığımız tənlikdə məchulu iştirak etmir:



.



Sonra sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini ədədinə vuraraq alınan tənliyi sistemin üçüncü tənliyindən tərəf-tərəfə çıxırıq. Bu mühakiməni ardıcıl tətbiq etməklə (10) sistemini



(11)



şəklində sistemə gətirmək olar. Aldığımız yeni sistemin 2-ci, 3-cü və s. tənliklərindən istifadə etməklə yuxarıda göstərdiyimiz üsulla məchulunu da yox etmək olur. Bu mühakiməni ardıcıl olaraq tətbiq etməklə (10) sistemini ona ekvivalent olan



(12)



şəklində sistemə gətirmək mümkündür.

(12) sisteminə **pilləvarı** (və ya pillələr şəklində) **sistem**, və s. əmsallarına isə sistemin **baş elementləri**  deyilir. Aydındır ki, sistemə Qauss üsulunun tətbiq oluna bilməsi üçün sistemin baş elementlərinin sıfırdan fərqli olması zəruri və kafidir.



Qeyd edək ki, (10) sisteminin çevrilməsi nəticəsində alınan (12) sistemi uyuşan və ya uyuşmayan ola bilər. Birinci halda (12) sistemini həll edərək (10) sisteminin axtarılan həlləri tapılır. (12) sistemi uyuşan olmadıqda (məsələn, sistemdə sol tərəfdəki bütün əmsalları sıfır olan, lakin sağ tərəfi sıfır olmayan şəklində tənlik alındıqda) (10) sistemi də uyuşmayan olar.



Qeyd edək ki, (12) sistemi uyuşan olduqda iki haldan ancaq biri mümkündür, həmin sistemin ya yeganə həlli var, ya da sonsuz sayda həlli var.

(10) sistemini Qauss üsulu ilə həll edərkən tənliklər üzərində aparılan əməlləri bəzən onların əmsallarından düzəlmiş



matrisi üzərində aparmaq daha münasib olur.

**Misal 8.** Xətti tənliklər sistemini Qauss üsulu ilə həll edin.

(14)



**Həlli.** Sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini 2-yə vurub alınan bərabərliyi uyğun olaraq 2-ci və 4-cü tənlikdən tərəf-tərəfə çıxaq, sonra birinci tənliyin hər iki tərəfini 3-ə vurub alınan tənliyi 3-cü tənlikdən tərəf-tərəfə çıxaq, nitəcədə (14) sisteminə ekvivalent olan

(15)



tənliklər sistemini alarıq. Bu sistemin 2-ci tənliyindən 3-cü tənliyini tərəf-tərəfə çıxsaq və alınan bərabərliyin hər iki tərəfini (-1)-ə vursaq, nəticədə (15) sistemini

(16)



tənliklər sistemi ilə əvəz etmiş oluruq. (16) sisteminin 2-ci tənliyinin hər iki tərəfini əvvəlcə (4)-ə, sonra da (7)-yə vurub alınan bərabərlikləri uyğun olaraq üçüncü və dördüncü tənliklərlə toplamaqla,

(17)



şəklinə gətirmək olar.

Aydındır ki, (14) xətti tənliklər sistemi ilə (18) pilləvarı (üçbucuq şəkilində) xətti tənliklər sistemi ekvivalentdir. Alınan sistemdən məchulundan başlayaraq, bütün məchullar aşağıdakı kimi tapılır:



, , , .



**5. Xətti tənliklər sisteminin Qauss-Jordan üsulu ilə həlli**

Xətti tənliklər sistemini Qauss üsulu ilə həll edərkən, verilmiş sistem ya üçbucaq şəkilində, ya da trapesiya şəklində sistemə gətirilir.

Əgər sistem üçbucaq sistemə gətirilirsə, onda axırıncı tənlikdən məchulu tapılır, məchulunun qiymətini axırdan 2-ci tənlikdə yazmaqla məchulu tapılır. Prosesi ardıcıl davam etdirməklə məchulları tapılır. Bu isə Qauss üsulu ilə tənliklər sisteminin həll edilməsində çətinlik yaradır. Ona görə də alman alimi Jordan bu üsulu müəyyən qədər təkmilləşdirmiş və alınan üsula **Qauss-Jordan üsulu** deyirlər. Qauss-Jordan üsulunun sadəliyi ondan ibarətdir ki, əməliyyat zamanı məchullar birbaşa tapılır və əməlliyyat cədvəl üzərində aparılır.



Tutaq ki,



xətti tənliklər sistemi verilmişdir. Bu tənliklər sistemini Qauss-Jordan üsulu ilə həll etmək üçün aşağıdıkı cədvəli quraq.



Sıfırdan fərqli elementini götürək (sıfırdan fərqli istənilən elementi götürmək olar). Bu elementə **aparacı element**, aparıcı element seçilən sətrə **aparıcı sətir**, sütüna isə **aparıcı sütün** deyilir. Aparıcı element vahiddən fərqli olduqda onun yerləşdiyi sətrin bütün elementləri aparıcı elementə bölünür və «düzbucaqlılar üsulu» adlanan üsulla yeni cədvəl tərtib olunur. II cədvəldə hər hansı elementin, məsələn, elementlərinin tapılması qaydasını göstərək. Bu element



düzbucaqlısı vasitəsi ilə



bərabərliyindən tapılır. Eyni qayda ilə cədvəlin digər elementləri tapılır. Prosesdə aşağıdakı sxem alınır:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| verilmiş sistem |  |  |
| I iterasiya |  |  |
| II iterasiya |  |  |

Prosesi davam etdirməklə

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

cədvəli alınır ki, buradan da alınır.



Qeyd edək ki, Qauss-Jordan üsulu ilə xətti tənliklər sisteminin həlli prosesindən onun, uyuşan olub olmaması biləvasitə alınır.

**Misal 8.** Tənliklər sistemini Qauss-Jordan üsulu ilə həll edin



**Həlli.** Cədvəli qurmaqla həll edək.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Verilmiş sistem |  |  |
| I iterasiya |  |  |
| II iterasiya |  |  |
| III iterasiya |  |  |
| IV iterasiya |  |  |
| V iterasiya |  |  |

Ücüncü iterasiyada olduğu alınır.



**Misal 9.** Tənliklər sistemini Qauss-Jordan üsulu ilə həll edin.



**Həlli.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Verilmiş sistem |  |  |
| I iterasiya |  |  |
| II iterasiya |  |  |

Verilmiş sistemin həlli yoxdur çünki ikinci iterasiyada, axırıncı üç sətirin sol tərəfləri eyni sağ tərəfləri isə müxtəlif ədədlərdir . Bu isə mümkün deyil. Ona görə də sistem birgə deyil.



**§3. Vektorlar cəbri**

**1. Vektorlar və onlar üzərində əməllər**

Yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətlərə **skalyar kəmiyyətlər** və ya sadəcə **skalyarlar** deyilir. Məsələn, uzunluq, sahə, həcm, kütlə və s. skalyar kəmiyyətlərdir.

Qiymət və istiqaməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətlərə **vektorial kəmiyyətlər** yaxud sadəcə **vektorlar** deyilir. Məsələn, qüvvə, hərəkətin sürəti, təcili və s. vektorial kəmiyyətlərdir.

Vektorial kəmiyyətləri həndəsi olaraq istiqamətlənmiş düz xətt parçası ilə göstərirlər. Vektorun istiqaməti ox işarəsi ilə göstərilir.



nöqtəsi vektorun başlanğıcı, nöqtəsi isə sonu adlanır. Bu vektor və ya kimi işarə olunur. Vektorun uc nöqtələri arasındakı məsafəyə onun **uzunluğu** və ya modulu deyilir və uygun olaraq , yaxud kimi işarə olunur.



Başlanğıc və son nöqtələri üst-üstə düşən vektor sıfır vektor adlanır və ilə işarə olunur. Sıfır vektorun uzunluğu sıfır, istiqaməti isə qeyri-müəyyəndir.



Uzunluqları və istiqamətləri eyni olan vektorlara bərabər vektorlar deyilir.

Vektorları toplamaq, bir vektordan digərini çıxmaq, vektoru istənilən ədədə vurmaq mümkündür. Bunlara vektorlar üzərində xətti əməllər deyilir.



və vektorlarını toplamaq üçün -nin başlan­ğı­cı­nı öz istiqaməti ilə -nın son nöqtəsinə gətirmək lazım­dır. Bu halda başlanğıcı -nın başlanğıcında, sonu isə -ninsonunda yerləşən vektor bu vektorların cəmi adlanır.



Üç və daha çox vektoru toplamaq üçün bu vektorlar paralel olaraq elə sürüşdürülür ki, ikinci vektorun başlanğıcı birincinin sonu ilə, üçüncü vektorun başlanğıcı ikinci vektorun sonu ilə və s., sonuncu vektorun başlanğıcı ondan əvvəlkinin sonu ilə üst-üstə düşsün. Nəticədə birinci vektorun başlanğıcını axırıncı vektorun sonu ilə birləşdirən vektor bu vektorların cəmi hesab olunur:



Bəzən, vektoruna verilən vektorların **qapayıcı vektoru** da deyirlər.



və vektorlarının **fərqi** elə vektoruna deyilir ki, onu ilə topladıqda vektoruna bərabər olsun.



Vektorların cəminin və fərqinin tapılması qaydasından alınır ki, iki vektorun cəmini və fərqini onlar üzərində paraleloqram qurmaqla da tapmaq olar. Buna paraleloqram qaydası deyirlər.



**vektorunun həqiqi ədədinə hasili** elə və ya vektoruna deyilir ki, o aşağıdakı şərtləri ödəsin



1. olduqda və eyni istiqamətli, olduqda isə əks istiqamətli olsunlar.



və ya olduqda hasil sıfır vektor olur.



Vektorların cəmi və ədədə hasili aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. 4.



1. 5.



1. 6.



Bir düz xətt və ya paralel düz xəttlər üzərində yerləşən vektorlara **kollinear vektorlar** deyilir.

**2. Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi**

Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemində ortonormal bazisləri ilə, ixtiyari nöqtəsinin koordi­natları isə uyğun olaraq ilə işarə edirlər: . Bu halda absis oxu adlanan, istiqamətində olan ox ilə, or­dinat oxu adlanan, istiqamətində olan ikinci ox isə ilə işarə olunur. Buna uyğun olaraq müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi deyirlər və ilə işarə edir­lər. Koordinat başlanğıcı ilə müstəvinin ixtiyari nöqtəsini birləş­dirən vektoruna **radius-vektor** deyilir və -lə işarə olunur.



Aydındır ki, müstəvi üzərində təyin olunmuş düzbucaqlı koordinat sisteminin köməyi ilə müstəvinin bütün nöqtələri çoxluğu ilə həqiqi ədədlərdən düzəlmiş və həmin nöqtələrin koordinatları olan bütün nizamlı cütləri çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılır.



0



х



Müstəvi üzərində yerləşən nöqtəsinin radius-vekto­runu



kimi göstərmək olar. vekto­runun koordinat oxları üzərində pro­yeksiyaları və olarsa, onda



.



vektorunun koordinat oxları üzərində və proyeksiyaları nöqtəsinin uyğun koordinatlarına bərabərdir . Absis oxu üzərində yerləşən nöqtələrin ordinatı, ordinat oxu üzərində yerləşən nöqtələrin absisi sıfra bərabərdir.



**3. Polyar koordinat sistemi**

Müstəvi üzərində nöqtənin vəziyyətini təyin etmək üçün polyar koordinat sistemi adlanan sistemdən də istifadə olunur. Bunun üçün müəyyən oriyentasiya, **polyus** adlanan bir nöqtəsi, polyar adlanan və həmin nöqtədən çıxan şuası və ölçü vahidi verilməlidir. Bu koordinat sisteminə görə istənilən nöqtəsi iki həqiqi ədədlə birqiymətli təyin olunur. Bu ədədin birincisi nöqtəsinin radius-vekto­runun



0



uzunluğudur. İkincisi isə vektorunun polyar oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağıdır. ədədinə nöqtəsinin polyar radiusu, -yə isə polyar bucağı deyilir və kimi işarə olunur.



Buradan aydındır ki, nöqtəsinin polyar radiusu mənfi olmayan ədəddir: .



polyar bucağı isə işarəsi nəzərə alınmaqla həddinə qədər ( istənilən tam ədəddir) dəqiqlikdə götürülür. Bu o deməkdir ki, müstəvi üzərindəki ixtiyari nöqtəsinə yalnız bir cüt polyar koordinatı yox, sonsuz sayda şəklində polyar koordinatları uyğun gəlir. Bunun tərsi olan uyğunluq isə birqiymətlidir. Yəni hər bir ədədlər cütünə müstəvi üzərində yeganə nöqtə uyğundur.Müstəvi üzərində yerləşən nöqtələr çoxluğu ilə polyar koordinatlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq üçün bucağını şərtindən seçmək lazımdır.



İndi istənilən nöqtənin düzbucaqlı və polyar koordinatları arasındakı əlaqəni müəyyən edək.



0



Fərz edək ki, müstəvi üzərində polyar koordinat sistemi təyin olunmuşdur. Absis oxu polyar oxla və koordinat başlanğıcı polyusla üst-üstə düşən düzbucaqlı koordinat sistemi quraq. Müstəvi üzərində olan istənilən nöqtəsinin polyar koordinatları , düzbucaqlı koordinatları isə olsun.



Onda düzbucaqlı üçbucuğından:



və ya (1)



Bu düsturlardan istifadə edərək, və -ni və -lə ifadə etmək olar:



(2)



**Misal 1.** Polyar koordinatları məlum olan nöqtəsinin düzbucaqlı koordinatlarını tapmalı.



**Həlli.** (1) ifadəsinə görə:



Deməli, olar.



**Misal 2.** Düzbucaqlı koordinatları məlum olan nöqtəsinin polyar koordinatlarını tapmalı.



**Həlli.** (2) bərabərliklərinə görə:



Deməli, olar.



**4. Fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi**

Tutaq ki, fəzada bazisi verilmişdir. Fəzada qeyd olunmuş bir 0 nöqtəsi götürək və həmin bazis vektorlarının başlanğıclarını bu nöqtəyə köçürək. Bu vektorlara **vahid vektorlar** da deyirlər, 0 nöqtəsinə koordinat başlanğıcı və bu nöqtədən bazis vektorları istiqamətində keçən düz xəttlərə koordinat oxları deyilir. Bu koordinat oxlarından istiqamətində olana absis oxu, istiqamətində olana ordinat oxu, istiqamətində olana isə applikat oxu deyilir. Koordinat oxlarından keçən müstəvilərə **koordinat müstəviləri** deyilir. Fəzada düz bucaqlı koordinat sistemini ilə işarə edirlər. Fəzada təyin olunmuş düzbucaqlı koordinat sisteminin köməyi ilə fəzanın bütün nöqtələri çoxluğu ilə həqiqi ədədlərdən düzəlmiş bütün nizamlı üçlüklər çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılır.

х



0



İndi fəzada istənilən nöqtəsinin vəziyyətini təyin edək. Bu məqsədlə ilə nöqtəsini birləşdirən vektorunu ilə işarə edək və onu nöqtəsinin radius-vektoru adlandıraq. radius-vektorunun koordinat oxları üzərində proyeksiyasını uyğun olaraq və ilə işarə edək. Onda aydındır ki, və .Bu halda



0



olduğundan .



Deməli, vektorunun koordinat oxları üzərində



və proyeksiyaları nöqtəsinin uyğun koordinat­larıdır: .Koordinat oxlarınınbir-birinə nəzərən yerləşmə istiqamətindən asılı olaraq fəzada iki növ düzbucaqlı koordinat sistemi götürmək olar.



0



Дцзбуъаглы саь координат системи

Дцзбуъаглы сол координат системи



х

0



х

Tutaq ki, fəzada vektoru verilmişdir. Ümumiliyi pozmadan, fərz edək ki, koordinat başlanğıcından yönəlmişdir. Bu vektoru vahid vektorlara nəzərən ayırmaq tələb olunur. -nın koordinat oxları üzərindəki proyeksi­yalarını uyğun olaraq ilə işarə edək. Onda , , . Bu halda , , . vektorlarına  **vektorunun komponentləri** deyilir.



Şəkildən vektorların toplanmasına əsasən yaza bilərik.



0



Buna görə də ifadəsinə **vektorun proyeksiyaları** və ya **koordinatları** ilə ifadəsi deyilir və



kimi işarə olunur.

**5. İki nöqtə arasındakı məsafə və parçanın müəyyən nisbətdə bölünməsi**

Müstəvidə düzbucaqlı Dekart koordinat sistemini verilərsə, onda koordinatları və olan nöqtəsi həmin müstəvidə -lə işarə olunur.



və nöqtələri arasındakı məsafə



düsturu ilə təyin olunur.

Xüsusi halda, koordinat başlanğıcından nöqtəsinə qədər olan məsafə



bərabər olur.

və nöqtələrini birləşdirən parçanı müəyyən nisbətində bölən nöqtəsinin koordinatları



ifadələri ilə hesablanır .



Xüsusi halda olduqda parçanın orta nöqtəsinin koordinatları düsturu alınır:



.



**6. Vektorun proyeksiyası**

Aydındır ki, və vektorları kollinear olduqda elə yeganə ədədi var ki, münasibəti ödənir. və eyni istiqvamətli olduqda , əks istiqamətli olduqda isə olur. münasibəti və vektorlarının **kollinearlıq şərti** adlanır.



Bir müstəvi və ya paralel müstə­vi­lər üzə­rində yerləşən vek­­­torlara **komp­la­nar­ v**ektorlar deyilir.

Tutaq ki, hər hansı vektoru və oxu verilmişdir. vektorun üç nöqtələrindən oxu­na çəkilmiş per­pen­dikulyarların ayırdığı vek­to­ru­nun qiymətinə vektorunun oxu üzə­rində pro­yek­si­ya­sı deyilir və sim­­vo­lik olaraq kimi işarə olu­nur. Bu qiy­mət vek­­to­ru­nun is­ti­qaməti ilə eyni olduqda müs­bət, əks ol­duqda isə mən­fi götürülür.



*l*

oxu ilə vektoru ara­sındakı bucaq dedikdə, hə­min oxla və nöq­tə­lə­rindən keçən (və is­tiqaməti -dan -yə tərəf olan) arasındakı bucaq başa düşülür. kimi işarə olu­­nur. Bu bucağa vek­to­ru­nun oxuna meyl bucağı deyilir. Vektorun *ox* üzərindəki pro­yeksiyası üçün aşağıdakı münasibət doğrudur.



.



0



Vektorun *ox* üzərində proyeksiyası üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

1. Vektor özünə paralel olaraq başqa yerə köçürüldükdə onun *ox* üzərindəki proyeksiyası dəyişmir,
2. Sabit ədədi proyeksiya işarəsi xaricinə çıxarmaq olar,

.



1. Vektorlar cəminin proyeksiyası toplananların proyeksiyaları cəminə bərabərdir.

.



**7. Vektorların bazis üzrə ayrılışı**

Tutaq ki, vektorları və ədədləri verilmişdir. cəminə vektorlarının **xətti kombinasiyası** deyilir.



**Tərif.** Heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan elə həqiqi ədədləri var ki,



(1)



münasibəti ödənilsin, onda vektorlarına **xətti asılı vektorlar** deyilir.



Əgər (1) münasibəti olduqda ödənilərsə, onda vektorlarına **xətti asılı olmayan vektorlar** deyilir.



Əgər olarsa, onda deyirlər ki, vektoru vektorlarının **xətti kombinasiyasıdır** və ya vektoru vektorları üzrə ayrılmışdır.



**Tərif.** Müstəvi üzərində kollinear olmayan və məyyən ardıcıllıqla götürülən iki vektora həmin müstəvi üzərində **bazis** vektorları deyilir.

**Teorem.** Müstəvi üzə­­rindəki ixtiyari vekto­runu bazisi üzrə yeganə qayda ilə



(2)



şəklində ayırmaq olar.

ədədlərinə vektorunun müstəvi üzərin­dəki bazisinə nəzərən koordinatları deyilir.



Müstəvi üzərində koordinatları məlum olan və vektorlarının bazis təşkil edib-etmədiyini yoxlamaq üçün bu vektorların koordinatlarından düzəldilmiş iki tərtibli



və 



matrislərindən birinin ranqını hesablamaq lazımdır. Bu matrislərdən hər hansı birinin ranqı 2-yə bərabər olduqda, və bazis vektorlarıdır.



**Tərif.** Komplanar olmayan və müəyyən ardıcıllıqla götürülən üç vektor fəzada bazis adlanır.

**Teorem.** Fəzada yerləşən istənilən vektorunu komplanar olmayan vektorları üzrə yeganə qayda ilə



(3)



şəklində ayırmaq olar.

Fəzada , , vektorlarının bazis təşkil etməsi üçün



və



matrislərindən birinin ranqı 3-ə bərabər olmalıdır.

vektorunun bazis vektorları üzrə koordinatlarını tapmaq üçün müstəvi üzərində olduqda (2), fəzada olduqda isə (3) bərabərliyini koordinatlar ilə ifadə edərək, alınan iki və ya üç məchullu xətti tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.



Tutaq ki, , və ya



vektorları verilmişdir. Koordinatları ilə verilmiş vektorlar üzərində xətti əməllər aşağıdakı kimi təyin olunur.

və



,



koordinatları ilə verilmiş vektorunun modulu (uzunluğu)



düsturu ilə tapılır.

Verilmiş və vektorları bərabərdirsə , onda onların uyğun koordinatları da bərabərdir



.



Fəzada və vektorlarının kollinear olması üçün zəruri və kafi şərt onların uyğun koordinatlarının mütənasib olmasıdır:



.



**8. Vektorların skalyar hasili və xassələri**

Başlanğıcları bir nöqtəyə gətirilmiş və vektorları arasındakı bucaq həmin vektorlar arasındakı **bucaq** hesab olunur və ilə işarə olunur. Aydındır ki, həmişə olar.



**Tərif.** İki vektorun uzunluqları ilə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinə onların **skalyar hasili** deyilir.

və vektorlarının skalyar hasilini kimi işarə edəcəyik. Tərifə əsasən



İki vektorun skalyar hasili ədəddir. İki vektorun skalyar hasilini



kimi də yazmaq olar. Beləliklə, skalyar hasilə aşağıdakı kimi də tərif vermək olar.

**Tərif.** İki vektorun skalyar hasili onlardan birinin uzunluğu ilə digərinin həmin vektor üzərindəki proyeksiyası hasilinə bərabərdir.

Skalyar hasilin aşağıdakı xassələri vardır.

1. Skalyar hasil yerdəyişmə (kommutativlik) xassəsinə malikdir: .



1. Skalyar vuruğu skalyar hasil işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:



1. Skalyar hasilin paylanma (distrubutivlik) xassəsi vardır:

.



Tutaq ki, və verilir. Onda onların skalyar hasili şəklində ifadə olunur.



Koordinatları məlum olan və vektorı arasındakı bucağın kosinusu



(4)



düsturu ilə hesablanır.

Əgər olarsa, onda



(5)



olar. Bu ifadəyə iki vektorun **perpendikulyarlıq şərti** deyilir.

Əgər olarsa, onda olar.



Bu halda



(6)



olar.

Tutaq ki, vektorunun koordinat oxlarının müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqlar -dır. Bu bucaqlara vektorunun **yönəldici** **bucaqları** deyilir.



İfadələri ilə təyin olunan , və kəmiyyətlərinə vektorunun **yönəldici** **kosinusları** deyilir.



**Misal 1.** və vektorları və -in hansı qiymətlərində kollinear olar.



**Həlli.** Kollinearlıq şərtinə görə



**Misal 2.** vektorları və onların arasında qalan bucaq olduğunu bilərək və -nı tapın.



**Həlli.**



.



**Misal 3.** Müstəvi üzərində və vektorları verilmişdir. və vektorlarının bazis təşkil etdiyini göstərin və vektorunun bazis üzrə ayrılışını yazın.



, ,



**Həlli.** Sətirləri və vektorlarının koordinatorla-rından düzəldilmiş matrisi yazaq və onun determinantını hesablayaq:



ranq olduqundan vektorları bazis təşkil edirlər.



İndi isə vektorunu bir bazis üzrə ayrılışını yazaq.



Sonuncu bərabərliyi koordinatlarla ifadə etsək



Beləliklə vektorunun və bazisinə nəzərən ayrılışı olar.



**Misal 4.** və verilmişdir. və vektorlarının skalyar hasilini tapın.



**Həlli.** (1) düsturuna əsasən

.



**Misal 5.** vektorunun uzunluğunu tapın.



**Həlli.** (6) düsturuna görə

.



**Misal 6.** və vektorları arasındakı bucağı hesablayın.



**Həlli.** (4) düsturuna görə



burada .



**Misal 7.** olduqda və vektorlarının skalyar hasilini tapın



**Həlli.** (3) düsturuna görə

.



**Misal 8.** və üç­bu­ca­ğın təpə nöqtələridir. Üçbucağın təpəsindəki daxili bu­ca­ğını tapın.



**Həlli.** Axtarılan bucağı və vektrorları arasındakı bucaqdır. Bu vektorları tapaq:



.



**9. Vektorların vektorial hasili və xassələri**

Müəyyən ardıcılıqla və komplanar olmayan və vektorlarına baxaq. vektorunun son ucundan baxdıqda vektorunu vektoru üzərinə gətirmək üçün kiçik bucaq qədər fırlama saat əqrəbi hərəkətinin əksinə olarsa, bu halda deyirlər ki, , vektorları **sağ oriyentasiyalı** üçlük, əks halda isə **sol oriyentasiyalı** üçlük təşkil edir.



**Tərif.** vektorunun **vektoruna vektorial** hasili aşağıdakı üç şərti ödəyən vektoruna deyilir:



1. vektorunun uzunluğu və vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə bərabər olsun,



1. vektoru və vektorlarının müstəvisinə perpendikulyar olsun,



1. , üçlüyü sağ oriyentasiyalı olsun.



və vektorlarının vektorial hasilini kimi işarə edəcəyik. Tərifə əsasən,



.



Tərifdən aydındır ki, kollinear olan və vektorlarının vektorial hasili sıfra bərabərdir, yəni



Xüsusi halda olar.



**Vektorial hasilin aşağıdakı xassələri vardır.**

1. Vektorial hasil yerdəyişmə (kommutativlik) xassəsinə tabe deyildir:

.



2. Skalyar vuruğu vektorial hasil işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

.



3. Vektorial hasildə paylanma qanunu doğrudur:



Tutaq ki, və vektorları koordinatları ilə verilmişdir. Bu vektorların vektorial hasili



(7)



və ya

(8)



düsturları ilə hesablanır.

**Nəticə.** və vektorlarının kollinear olması üçün zəruri və kafi şərt



olmasıdır.

**Misal 9.** və vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsini tapın.



**Həlli.** (8) düsturuna görə



olduğundan .



**Misal 10.** və vektorlarının vektorial hasilini tapın.



**Həlli.**



**.**



**10. Vektorların qarışıq hasili və xassələri**

**Tərif.** və vektorlarının vektorial hasilinin vektoruna skalyar hasilinə vektorlarının **qarışıq hasili** deyilir və kimi işarə olunur.



və vektorlarının koordinatları məlum olduqda, onların qarışıq hasili



(9)



düsturu vasitəsilə hesablanır.

**Qarışıq hasilin aşağıdakı xassələri vardır.**

1. vektorlarının dairəvi yerdəyişməsi nəticəsində onların qarışıq hasili dəyişmir:



.



1. Qarışıq hasildə ixtiyari iki vektorun yerini dəyişdikdə, qarışıq hasilin yalnız işarəsi dəyişir:

.



Üç vektorun qarışıq hasilinin mütləq qiyməti həndəsi olaraq bu vektorlar üzərində qurulmuş paralelepipedin həcminə bərabərdir.

. (10)



və vektorları üzərində qurulmuş piramidanın həcmi, həmin vektorlar üzərində qurulmuş paralelepipedin həcminin -nə bərabər olduğundan



(11)



düsturunu alırıq.

**Komplanarlığın tərifi.**  vektorlarının qarışıq ha­si­li sıfra bərabərdirsə, onda bu vektorlar komplanar olar,



yəni, və ya .



**Misal 11.** , vektorlarının qarışıq hasilini hesablayın.



**Həlli.** (9) düsturuna görə



=.



**Misal 12.** Təpə nöqtələri və olan piramidanın həc­mi­ni tapmalı.



**Həlli.** Bu məqsədlə, əvvəlcə , , və vektorlarını tapaq:



, .



Onda (11) düsturuna görə:

.



olar.

**§4. Müstəvi üzərində düz xətt tənlikləri**

**1. Müstəvi üzərində düz xəttin ümumi tənliyi**

və dəyişənlərinə nəzərən bir dərəcəli olan hər bir tənlik müstəvi üzərində düz xətti təyin edir:



(1)



Burada -sabit əmsallar və olduqda (1) tənliyinə **düz xəttin ümumi tənliyi** deyilir. vektoruna düz xəttin **normal vektoru** deyilir.



nöqtəsindən keçib normal vektoruna malik olan düz xəttin tənliyi



(2)



olar. və düz xəttləri uyğun olaraq



ümumi tənlikləri ilə verilibsə, onda onlar arasındakı bucağı düz xəttlərin normal vektorları arasındakı bucaq kimi



(3)



düsturu ilə hesablanır.

olduqda (3)-dən ümumi tənlikləri ilə verilmiş **iki düz xəttin perpendikulyarlıq şərti** alınır:



(4)



**iki düz xəttin paralellik şərti** isə

(5)



olar.

olduqda və düz xəttləri kəsişir və onların kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün həmin tənlikləri birgə həll etmək lazımdır.



Əgər və düz xəttləri kəsişirlərsə, onda



(6)



tənliyi bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsindən keçən **düz xəttlər dəstəsinin tənliyidir**.

Paralel düz xətlərin tənlikləri ümumi şəkildə verildikdə, paralellik şərtindən istifadə etməklə, onların tənliklərini

və



kimi yazmaq olar. Bu zaman **düz xəttlər arasındakı məsafə**

(7)



düsturu ilə hesablanır.

və düz xəttləri arasındakı bucağın tənbölənlərinin tənliyi



(8)



olar.

nöqtəsindən ümumi tənliyi ilə verilmiş **düz xəttə qədər məsafə**



(9)



düsturu ilə hesablanır.

**2. Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi**

Əgər düz xəttin ümumi tənliyində olarsa, onda onu -ə nəzərən həll etsək



(10)



düz xəttin bucaq əmsallı tənliyini alarıq (burada ). bucaq əmsalı adlanır və düz xəttin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə bərabərdir . -isə bu düz xəttin oxunu kəsdiyi nöqtənin ordinatıdır.



nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı olan düz xəttin tənliyi



(11)



şəklində olar.

və bucaq əmsallı tənlikləri ilə verilmiş və **düz xəttləri arasında qalan bucağının** tangensi



(12)



düsturu ilə hesablanır.

olduqda (**parallellik şərti**)



olduqda (**perpendikulyaprlıq şərti**)



olar.

və **nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi**



(13)



şəklindədir.

vektoruna paralel olan və nöqtəsindən kesən düz xəttin tənliyi



(14)



olar. (13) tənliyi düz xəttin kanonik tənliyi adlanır.

Düz xəttin **parametrik tənliyi**

(15)



kimi yazılır. Bu tənliklə təyin olunan düz xətt də nöqtəsindən keçir və vektoruna paraleldir.



**3. Düz xəttin parçalarla tənliyi**

Düz xəttin ümumi tənliyində olarsa, onda tənliyin bütün hədlərini -yə bölsək



(16)



tənliyini alarıq, burada . (16) Tənliyinə düz xəttin **parçalarla tənliyi** deyilir. (16) tənliyində düz xəttin absis oxundan isə ordinat oxundan ayırdığı parçalardır.



**4. Düz xəttin normal tənliyi**

Düz xəttin (1) ümumi tənliyinin hər tərəfini ədədinə vursaq



(17)



**düz xəttin normal tənliyi** alınır. Burada normallaşdırıcı vuruq adlanır və onun işarəsi elə götürülür ki, şərti ödənsin. (17) tənliyində koordinat başlanğıcından düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu, isə bu perpendikulyarın absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır.



nöqtəsindən (17) normal tənliyi ilə verilmiş **düz xəttə qədər olan məsafə**



(18)



ifadəsi ilə hesablanır.

**Misal 1.** düz xəttin ümumi tənliyi verilib. Düz xəttin



a) bucaq əmsallı tənliyini,

b) parçalarla tənliyini,

v) normal tinənliyini yazın.

**Həlli.**

a) Verilmiş tənliyi -ə görə həll etsək, düz xəttin bucaq əmsallı tənliyini alarıq. Burada



b) Düz xəttin ümumi tənliyinin hər tərəfəni 15-ə bölsək, onda düz xəttin parcalarla tənliyini alarıq.Bu düz xəttin parçalarla tənliyidir. Burada .



v) normallaşdırıcı vuruğunu tapaq: . tənliyinin hər tərəfini -ə vursaq,



normal tənliyini alarıq, burada



.



**Misal 2.** və düz xəttləri arasında qalan iti bucağı tapın.



**Həlli.** və qiymətlərini (12) ifadəsində nəzərə alsaq



alarıq.



**Misal 3.** nöqtəsinədən düz xəttinə qədər məsafəni tapın.



**Həlli.** (9) bərabərliyinə görə yaza bilərik.

.



**Misal 4.** Üçbucağın və təpə nöqtələri verilmişdir. təpəsindən tərəfinə endirilən hündürlüyün tənliyini yazın.



**Həlli.** tərəfinin tənliyinin bucaq əmsalını tapaq.



Perpendikulyarlıq şərtinə görə təpəsindən çəkilən hündürlüyün bucaq əmsalı olar. Onda hündürlüyün tənliyi



olar.

**Misal 5.** düz xətlər dəstəsinə aid olan və nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.



**Həlli.** nöqtəsinin koordinatları axtarılan düz xəttin tənliyini ödədiyi üçün



olar.-nın bu qiymətini düz xətlər dəstəsinin tənliyində yazmaqla axtarılan düz xəttin tənliyini



şəklində alarıq.

**§5. Fəzada müstəvi və düz xətt tənlikləri**

**1. Fəzada müstəvi tənlikləri**

Əvvəlcə müstəvinin vektorial və normal tənliklərini öyrənək. Tutaq ki, fəzada müstəvisi verilmişdir. Koordinat başlanğıcından müstəviyə perpendikulyar (normal) çəkərək, onun müstəvini kəsdiyi nöqtəni ilə işarə edək (şəkil 1). Bu normal üzərində yerləşən və istiqaməti dan ə doğru olan vahid vektor , onun koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlar və vektorunun uzunluğu olsun.

Şəkil 1

x

z

y

Q



N

M

m

O



Müstəvi üzərində yerləşən ixtiyari nöqtəsinin radius vektoru üçün



(1)



münasibəti ödənilir. Deməli, (1) bərabərliyi müstəvisinin tənliyidir. olduğundan (1) bərabərliyini və ya



(2)



şəklində yazmaq olar. (2) bərabərliyinə müstəvinin vektorial tənliyi deyilir. və olduğundan (2) bərabərliyini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:



(3).



Buna müstəvinin normal tənliyi deyilir. Əgər müstəvi koordinat başlanğıcından keçirsə, onda onun tənliyi

(4)



şəklində olar. Buradan aydın olur ki, fəzada ixtiyari müstəvinin tənliyi və dəyişənlərinə nəzərən bir dərəcəli xətti tənlikdir:



(5).



Göstərək ki, (5) şəklində olan hər bir xətti tənlik fəzada bir müstəvi təyin edir. Doğrudan da, (5) tənliyinin sol tərəfini və vektorları vasitəsilə



(6)



şəklində yazmaq olar. vektorunun uzunluğu olsun. (6) bərabərliyinin hər iki tərəfini şərtini ödəyən ədədinə bölsək və ilə işarə etsək, onda; (2) olar. Bu isə fəzada müstəvinin vektorial tənliyidir. Deməli (5) tənliyi fəzada bir müstəvi təyin edir və onun normal vektorudur. (5) tənliyinə müstəvinin ümumi tənliyi deyilir. Aparılan mühakimədən aydın olur ki, (5) tənliyini (2) və ya ona ekvivalent olan normal tənlik şəklinə gətirmək üçün onun hər iki tərəfini



(7)



ədədinə vurmaq lazımdır. Buna görə də (7) kəmiyyətinə müstəvi tənliyinin normallaşdırıcı vuruğu deyilir. Müstəvinin (5) ümumi tənliyindəki və əmsallarının bir və ya bir neçəsi sıfır olduqda, həmin müstəvinin verilmiş koordinat sisteminə nəzərən necə yerləşməsi haqqında fikir söyləmək olar. Məsələn, olduqda (5) müstəvisi koordinat başlanğıcından keçər. olduqda isə müstəvi oxundan keçər. Başqa hallarıda eyni qayda ilə təyin etmək olar.



Tutaq ki, və nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələrdən keçən müstəvi tənliyini tapaq. Müstəvi üzərində yerləşən ixtiyari nöqtəni ilə işarə edək. Onda və vektorları həmin müstəvi üzərində yerləşər. Bu o zaman olar ki, həmin vektorlar komplanar olsun. Bu vektorların komplanarlıq şərti və ya



(8)



şəklində yazılır. Bu verilmiş nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyidir.



**Misal 1.** və nöqtələrindən keçən müstəvi tənliyini yazın.



**Həlli.** Üç nöqtədən keçən müstəvi tənliyinə əsasən



Burada bir xüsusi hala baxaq. Tutaq ki, müstəvi və nöqtələrindən keçir(Şəkil 2).



у

z

*x*



0

Şəkil 2



Onda onun tənliyi olar. Buradan olar. Alınan bərabərliyin hər iki tərəfini ədədinə bölsək:



(9)



münasibətini alarıq. (9) tənliyinə müstəvinin parçalarla tənliyi deyilir. İndi isə iki müstəvi arasındakı bucağı təyin edək.

Tənlikləri uyğun olaraq

(10)



və (11)



olan və müstəviləri arasındakı bucağı tapaq. Bu müstəvilərin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucağın ölçüldüyü xətti bucaq həmin müstəvilərin və normalları arasındakı bucağa bərabərdir (Şəkil 3) və vektorları arasındakı bucağı isə və ya



(12)



düsturu ilə təyin olunur. və müstəviləri paralel olduqda onların normalları olan və vektorları kollineardır. Buradan həmin müstəvilərin paralellik şərtləri alınır:. Müstəvilər perpendikulyar olduqda və (12) düsturuna əsasən



Q1

Q2

Şəkil 3



olur.



**Misal 2.** və müstəvi­ləri arasında qalan bucağı tapın.



**Həlli.** Verilmiş müstəvinin normalları uyğun olaraq olduğundan,



olar.

Fəzada verilmiş nöqtəsindən (2) tənliyi ilə verilmiş müstəviyə qədər olan məsafəsi



(13)



düsturu ilə tapılır, burada vektoru nöqtəsinin radius vektorudur. (13) düsturunda və olduğunu nəzərə alsaq



(14)



olar. Verilmiş nöqtəsindən (5) müstəvisinə qədər məsafə



düsturu ilə hesablanır.

**Misal 3.** Paralel və müstəviləri arasındakı məsafəni tapın.



**Həlli.** Müstəvilərdən biri üzərində ixtiyari bir nöqtə, məsələn birinci müstəvi üzərində nöqtəsini götürüb həmin nöqtədən ikinci müstəviyə qədər məsafə (10) düsturundan



tapılır.



**2. Fəzada düz xətt tənlikləri**

Fəzada hər bir düz xəttə iki müstəvinin kəsişmə xətti kimi baxmaq olar. Ona görə də fəzada düz xətt tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar

(15)



nöqtəsindən keçən və vekto­ru­na paralel olan düz xəttin



(16)



tənliy **düz xəttin kanonik tənliyi** adlanır. Xüsusi halda, həmin tənliyi



şəklində də yazmaq olar. Burada düz xəttin koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi uyğun bucaqlardır.



Fəzada düz xəttin koordinat oxları ilə əmələ gətirdikləri uyğun bucaqlarının kosinusu aşağıdakı düsturlarla hesablanır:



(17)



Düz xəttin kanonik tənliyinə parametrini daxil etməklə onun parametrik tənliyini almaq olar:



(18)



**Misal 4.** Verilmiş düz xətt tənliyini parametrik və kanonik şəkilə gətirməli.



**Həlli.** götürüb və -i onunla ifadə edək:



Beləliklə verilən düz xəttin parametrik tənliyi



Alınan parametrik tənlikdən



Fəzada iki və nöqtə­lərin­dən keçən düz xətt tənliyi



(19)



olar.

Kanonik şəkildə verilmiş və düz xəttləri arasında qalan bucağı



(20)



düsturu ilə hesablanır.

**Misal 5.** və düz xətləri arasında qalan bucağı tapın.



**Həlli.**  düz xəttinin istiqamətləndirici vektorunu tapaq.



düz xəttinin istiqamətləndirici vektoru olduğundan (20) düsturuna əsasən



olar. Buradan .



Fəzada iki düz xəttin paralellik şərti

, (21)



perpendikulyarlıq şərti isə

(22)



bərabərliyi ilə təyin olunur.

**3. Fəzada düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti**

Fəzada



Г



düz xətti ilə müstəvisi arasındakı bucaq



(23)



düsturuna əsasən tapılır.

**Misal 6.** müstəvisi ilə düz xətti arasında qalan bucağı tapın.



**Həlli.** , olduğundan (23) düsturuna əsasən,



Düz xətt müstəviyə perpendikulyar olduqda,

, (24)



paralell olduqda isə

(25)



olar. Ona görə də (24) bərabərliyinə düz xətlə müstəvinin **perpendikulyarlıq**, (25) bərabərliyinə isə **paralellik** şərti deyilir.

Düz xətlə müstəvinin kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını təyin etmək üçün, onların tənliklərini birlikdə həll etmək lazımdır. Bunun üçün düz xəttin parametrik və müstəvinin ümumi tənliyindən istifadə etmək əlverişlidir. Bu halda aşağıdakı şərtləri qeyd etmək olar.

a) olarsa, onda düz xəttlə müstəvi kəsişir.



b) və olarsa, onda düz xəttlə müstəvi kəsişmir (düz xətt müstəviyə paraleldir).



c) və olarsa, onda düz xətt müstəvi üzərindədir.



**Misal 6.** düz xətti ilə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətini təyin edin.



**Həlli.** Verilmiş müstəvinin normal vektoru , düz xəttin yönəldici vektoru isə -dir.



olduğu üçün düz xətt müstəvini kəsir.

Kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapmaq üçün müstəvinin tənliyində dəyişənlərini düz xəttin parametrik tənliyində ilə verilmiş ifadələrini yazmaqla alınan tənliyi -yə nəzərən həll edək:



-nin bu qiymətini düz xəttin parametrik tənliyində nəzərə alsaq, kəsişmə nöqtəsinin koordinatları



olar. Deməli, düz xətt müstəvini nöqtəsində kəsir.



Kanonik şəkildə verilmiş

və



düz xətlərinin bir müstəvi üzərində olması (komplanarlıq) şərti

 (26)

şəklində olur.

(27)



tənliyi -nın ixtiyari qiymətlərində



(28)



düz xəttindən keçən müstəvilər dəstəsinin tənliyidir. (28) tənliyi dəstənin oxu adlanır.

**Misal 7.** , müstə­vi­lə­r­inin kəsişmə xəttindən və nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.



**Həlli.** (27) müstəvilər dəstəsi tənliyindən istifadə edək. Verilmiş iki müstəvinin kəsişmə xəttindən keçən dəstənin tənliyi

.



Şərtə əsasən nöqtəsinin koordinatları bu tənliyi ödəməlidir, yəni



Buradan

.



Beləliklə, axtarılan tənlik



olar.

**§ 6. İkitərtibli əyrilər**

əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqli, isə məlum ədədlər olduqda, müstəvi üzərində koordinatları



(1)



tənliyini ödəyən nöqtələr coxluğuna **iki tərtibli əyri** deyilir. Burada ikitərtibli əyrilərin ən sadə növləri çevrə, ellips, hiperbola və parabola əyrilərinə baxılır.

**1. Çevrə**

**Tərif.** Müstəvi üzərində mərkəz adlanan verilmiş nöqtədən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtələrin həndəsi yerinə **çevrə** deyilir.



Əgər çevrənin radiusu, nöqtəsi çevrənin mərkə­zi­­dirsə, ondahəmin çevrənin tən­liyi (iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə)



(2)



olar.

х

Xüsusi halda, əgər çevrənin mərkəzi koordinat başlanğıcına düşərsə, onda onun tənliyi

(3)



şəkilində olar. (2) tənliyində mötərizələri açıb elementar çevirmələr aparsaq:

(4)



tənliyi alınar, burada .



(4) şəklindəki bərabərliklərin hamısı çevrə tənliyi olmur. (4) tənliyinin çevrə tənliyi olub-olmadığını müəyyən etmək üçün, onun sol tərəfindən və -ə görə tam kvadrat ayırmaq lazımdır.



(5)



Əgər olarsa, onda (4) tənliyi çevrəni təyin edir.



Əgər olarsa, onda (4) tənliyi nöqtəsini təyin edir.



Əgər olarsa, onda müstəvi üzərində koordinatları (4) tənliyini ödəyən nöqtə yoxdur.



nöqtəsi ilə çevrəsinin qarşılıqlı vəziyyəti aşağıdakı kimi təyin olunur.



olarsa, nöqtəsi çevrə üzərindədir.



olarsa, onda nöqtəsi çevrənin xaricindədir.



olarsa, onda nöqtəsi çevrənin daxilindədir.



Qeyd edək ki, çevrə tənliyində və -nın əmsalları bərabər, və -in hasili isə tənlikdə iştirak etmir. Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan radiuslu çevrə üzərindəki nöqtəsində bu çevrəyə toxunan düz xəttin tənliyi



(6)



şəklində, mərkəzi nöqtəsində olan çevrəyə çəkilən toxunanın tənliyi isə.



(7)



şəkilində olar.

**Misal 1.** çevrəsinin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu tapın.



**Həlli.** Tənliyin hər tərəfini 2-yə bölək və qruplaşdıraq:



Beləliklə mərkəzinin koordinatları və radiusu olur.



**Misal 2.** Mərkəzi nöqtəsində olan nöqtəsindən keçən çevrənin kanonik tənliyini yazın.



**Həlli.** Mərkəzi nöqtəsində olan çevrənin tənliyini yazaq:



nöqtəsi çevrə üzərində olduğu üçün onu



yaza bilərik. Buradan alarıq. Beləliklə axtarılan çevrənin tənliyi olar.



**Misal 3.** Tənliyi şəklində verilmiş çevrənin düz xəttinə perpendikulyar olan diametrinin tənliyini yazın.



**Həlli.** Çevrənin tənliyini aşağıdakı kimi çevirək:



Çevrənin mərkəzindən keçən diametrinin tənliyi şəklində olmalıdır. Bu diametr düz xəttinə perpendikulyar olduğu üçün, onun bucaq əmsalı olar. Deməli axtarılan diametrin tənliyi və ya şəklindədir.



**Misal 4.** çevrəsinə nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyini tapın.



**Həlli.** (7) bərabərliyindən istifadə edək:



**2.Ellips**

**Tərif.** Müstəvi üzərində fokus adlanan və nöqtəsindən



məsafələri cəmi sabit olub, fokus nöqtələri arasındakı məsafədən böyük olan bütün nöqtələr çoxluğuna ellips deyilir.



o



y



şəkil 1

Ellipsin tənliyini çıxarmaq üçün müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi götürək və ellipsin fokuslarının

x

y

A1

A2



B1

B2

şəkil 2



absis oxu üzərində koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşdiyini fərz edək (şəkil 1) onda ellips üzərində yerləşən ixtiyari nöqtəsi üçün



(1).



Burada ilə tərifdə göstərilən sabit ədəd işarə olunmuşdur. qəbul etsək, onda və olar. Bu halda iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə və



(1) bərabərliyinə əsasən:

(2).



Bu ellipsin axtarılan tənliyidir. Ellipsin (2) tənliyini sadə şəklə gətirək. Bu məqsədlə radikallardan birini sağa köçürsək, alınan bərabərliyinin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldirik: . Axırıncı bərabərliyi yenidən kvadrata yüksəltsək:



. Buradan



(3)



olduğundan qəbul etsək, onda (3) tənliyi



(4)



şəklində yazılar (4) tənliyinə ellipsin kanonik tənliyi deyilir. (4) tənliyindən və buradan



(5)



münasibəti alınar (şəkil 2). Əgər nöqtəsi ellipsin üzərində olarsa, yəni nöqtənin koordinatları (4) tənliyini ödəyərsə, onda həmin nöqtə ilə koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına görə simmetrik olan və nöqtələri də ellipsin üzərində olar. Deməli, ellips əyrisi koordinat oxlarına nəzərən simmetrik əyridir. Buna görə də onun birinci rübdə yerləşən hissəsini, yəni (4) tənliyindən alınan



(6)



funksiyasının qrafikini qurmaq kifayətdir. (6) bərabərliyindən aydındır ki, olduqda olur, olduqda isə olur. arqumenti 0-dan ya kimi artdıqda, dəyişəni dən 0-a kimi azalır. Bunlara əsasən ellipsin birinci rübdə yerləşən qövsü və koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olduğundan bütün ellips qurulur (şəkil 2). Koordinat oxları ellipsin simmetriya oxlarıdır. Ellipsin simmetriya oxlarının kəsişmə nöqtəsinə onun mərkəzi deyilir. və nöqtələri ellipsin təpələri, və parçaları isə ellipsin uyğun olaraq böyük və kiçik oxları adlanır. Böyük oxun uzunluğu , kiçik oxun uzunluğu dir.



Ellipsin forması ellipsin ekssentrisiteti adlanan kəmiyyətdən asılıdır. Ellips fokuslarının yerləşdiyi simmetriya oxuna onun fokal oxu deyilir. Ellipsin fokal oxuna perpendikulyar olan və düz xətləri onun direktrisləri adlanır. Ellipsin direktrislərinin biri təpəsinin sağından, o biri isə təpəsinin solundan keçir və ellipsi kəsmirlər. Xüsusi halda, olarsa, çevrə tənliyi alınar.



Fokal radiuslar və bərabərlikləri ilə ifadə olunur. Ellips əyrisinə nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyi



bərabərliyi ilə təyin olunur.

**Misal 5.** Ellipsin tənliyi verilmişdir. Onun yarımoxlarını, fokus nöqtələrini və eksentrisitetini tapın.



**Həlli.** bərabərsizliyinin hər tərəfini 4225-ədədinə bölsək



alarıq. Buradan tapılır. olduğundan olar. Onda fokus nöqtələri . Eksentrisiteti .



**3.Hiperbola**

**Tərif**. Müstəvi üzərində fokus adlanan verilmiş iki və nöqtəsindən məsafələrinin fərqi mütləq qiymətcə sabit kəmiyyət olub, fokus nöqtələri arasındakı məsafədən kiçik olan bütün nöqtələri çoxluğuna hiperbola deyilir.



Hiperbolanın tənliyini çıxartmaq üçün tərifdə göstərilən müsbət sabiti , fokuslar arasındakı məsafəni və fokusların absis oxu üzərində kordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşdiyini qəbul edək (şəkil 3). Onda, tərifə görə və nöqtələri üçün və ya



Şəkil 3



Buradan:

(7).



Bu tənliyi ellipsin tənliyi kimi sadələşdirək, yenə də

(8)



münasibətini alarıq. Bu halda, olduğundan qəbul edərək (8) tənliyini



(9)



şəklində yazmaq olar. (9) tənliyinə hiperbolanın kanonik tənliyi deyilir. (9) tənliyindən hiperbola absis oxunu və nöqtələrində kəsir. Bu nöqtələrə hiperbolanın təpələri deyilir. olduqda , buradan alınır ki, bu da hiperbolanın ordinat oxunu heç bir nöqtədə kəsmədiyini göstərir. Hiperbola əyrisi koordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir.



(9) münasibətindən: . Burada düz xəttinə hiperbolanın asimptotu deyilir.



Deyilənlərə əsasən hiperbolanın birinci rübdə yerləşən hissəsi və hiperbolanın koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olmasından istifadə edərək, bütün hiperbola əyrisi qurulur (şəkil 3). Hiperbolanın iki asimptotu var. Koordinat oxları hiperbolanın simmetriya oxlarıdır. Hiperbolanın simmetriya oxlarının kəsişməsinə onun mərkəzi deyilir. və parçalarına hiperbolanın uyğun olaraq həqiqi və xəyali oxları deyilir (şəkil 3). Hiperbolanın həqiqi oxunun uzunluğu ya, xəyali oxunun uzunluğu yə bərabərdir. düzbucaqlısına hiperbolanın əsas düzbucaqlısı deyilir.



Hiperbolanın forması onun eksentristeti adlanan kəmiyyətindən asılıdır. Hiperbola fokusunun yerləşdiyi oxa onun fokal oxu deyilir. Tənlikləri və olan düz xtlər hiperbolanın direktrisləri adlanır.



Hiperbola əyrisinə nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyi



kimi olur.

**Misal 6.** Hiperbolanın eksentrisiteti -yə bərabərdir. nöqtəsindən keçən hiperbolanın tənliyini yazın.



**Həlli.** Eksentristetin tərifinə görə , , . Hiperbolanın tənliyi olar. nöqtəsi hiperbola üzərində olduğu üçün . Beləliklə axtarılan hiperbolanın tənliyi olar.



**Misal 7.** Fokusları arasındakı məsafə 26, eksentrisiteti olan hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.



**Həlli.** Şərtə görə , . Hiperbolanın həqiqi yarımoxu , xəyali yarımoxu isə olur. Tələb olunan hiperbolanın tənliyi olar.



директрис

**4. Parabola**

Fokus adlanan verilmiş nöq­tədən və direktris adlanan verilmiş düz xətdən eyni uzaq­lıqda olan nöqtələrin həndəsi yerinə **parabola** deyilir.

Parabolanın tənliyini çıxartmaq üçün fokusunun absis oxu üzərində yerləşdiyini və direktrisinin həmin oxa perpendikulyar olduğunu qəbul edək. Fokusla direktris arasında məsafə olsun. Fərz edək ki, koordinat başlanğıcı parçasının orta nöqtəsində yerləşir. Onda və parabolanın ixtiyari nöqtəsi üçün və ya . Buradan və yaxud



(10)



tənliyinə parabolanın kanonik tənliyi deyilir. kəmiyyətinə parabolanın parametri deyilir. (10) tənliyindən aydındır ki, parabola əyrisi koordinat başlanğıcından keçir. Parabola əyrisi ordinat oxunun sağ tərəfində yerləşir. nöqtəsi parabolanın üzərində yerləşirsə, onda nöqtəsi də parabolanın üzərində yerləşər. Bu göstərir ki, parabola əyrisi absis oxuna nəzərən simmetrikdir. (10) tənliyinə görə olduğundan arqumenti qeyri-mədud artdıqca kəmiyyəti də qurulur (şəkil 4). Parabola əyrisinin bir simmetriya oxu vardır. O nöqtəsi onun təpə nöqtəsi, oxu isə fokal oxu adlanır. parabolasının nöqtəsində toxunanın tənliyi



olar.

**Qeyd:**  parabolasının təpə nöqtəsi nöqtəsində olarsa, onun tənliyi olur.



**Misal 8.** Verilmiş parabolasının direktrisinin tənliyini və fokus nöqtəsini tapın.



**Həlli.** olduğundan, direktrisin tənliyi , fokus nöqtəsi isə olar.



**Misal 9.**  Ordinat oxuna nəzərən simetrik yerləşən və fokus nöqtəsi olan parabolanın tənliyini yazın.



**Həlli.** Tələb olunan parabolanın tənliyi və fokus nöqtəsi olduğundan olar. Beləliklə parabolanın tənliyi olar.



**Misal 10.** parabolasının düz xəttinə paralel olan toxunanın tənliyini tapmalı.



**Həlli.** parabolasına nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyi və bu toxunan düz xəttinə paralel olduğundan, paralellik şərtinə əsasən olar. Bunu parabolanın tənliyində nəzərə alsaq, alarıq. Onda toxunanın tənliyi olar.



**§ 7. Ardıcıllığın limiti**

**1. Ardıcıllıq anlayışı**

Funksiyanın arqumenti, tam ədədi qiymətlər alan dəyişən kəmiyyət olduqda onun təyin oblastı ədəd oxunun tam ədədləri çoxluğundan ibarət olar. Belə funksiyalara tam qiymətli arqumentin funksiyası deyilir.

**Tərif.** natural ədədlər çoxluğunda tə­yin olunmuş funksiyasına **ardıcıllıq** deyilir.



Çox zaman əvəzinə indeksi arqumentin qiyməti olan bir hərf yazılır. Məsələn, və s. olduqda funksiyanın aldığı qiymətləri ardıcıl yazsaq,



və ya



kimi ədədlər düzülüşünü alarıq.

ədədlərinə ardıcıllığın hədləri, -ə ardıcıllığın birinci, -ə isə onun ümumi, yaxud -ci həddi deyilir.



Ardıcıllıq qısa olaraq kimi işarə olunur.



çoxluğunda təyin olunmuş funksiyasının verilmə üsulundan asılı olaraq, ardıcıllıq hər hansı düstur (ümumi həddin düsturu) və ya qanun (uyğunluq qanunu) ilə verilə bilər. Məsələn: və ya ardıcıllıqdır, və ya açıq şəkildə yazılmış -1, 1, -1, 1, … ardıcıllığı ancaq iki ədəddən ibarətdir, ardıcıllığında işlədi­lən ! (faktorial) işarəsinin mənası belədir: ilə 1-dən -ə qədər olan bütün natural ədədlərin hasili işarə olunur



.



Ədədi və həndəsi silsilələr ardıcıllıqdır:

və .



**Tərif.** ardıcıllığının bütün hədləri sabit ədə­dini aşmadıqda, yəni -in bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənildikdə, ona **yuxarıdan məhdud ardıcıllıq** deyilir.

ardıcıllığının bütün hədləri sabit ədədindən kiçik olmadıqda, yəni -in bütün qiymətlərində



olduqda, ona **aşağıdan məhdud ardıcıllıq** deyilir.

Yuxarıdan və aşağıdan məhdud olan ardıcıllığa **məhdud ardıcıllıq** deyilir.

Buradan aydındır ki, -in bütün qiymətlərində



bərabərsizliyini ödəyən ədədinin varlığı ardıcıllığının məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtdir.



**Tərif.** Məhdud olmayan ardıcıllığa **qeyri-məhdud ardıcıllıq** deyilir.

Məsələn: və ardıcıllıqları məhduddur, çünki, . və ardıcıllıqları isə qeyri-məhduddur. Ona görə ki, bu ardıcıllıqlar üçün -in bütün qiymətlərində bərabərsizliyini ödəyən heç bir sabit ədədini tapmaq mümkun deyil.



**Tərif.** -in bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənildikdə ardıcıllığına **monoton artan (azalan)** ardıcıllıq deyilir



Monoton artan və monoton azalan ardıcıllıqlara birlikdə monoton ardıcıllıqllar deyilir.

Məsələn: ardıcıllığı monoton azalan, ardcıllığı isə monoton artandır.



və ardıcıllıqları isə monoton deyildir.



**2. Ardıcıllığın limiti**

Tutaq ki, arqumenti ardıcıl olaraq 1, 2, 3,… qiymətlərini alır. Proses davam etdikcə dəyişəni istənilən qədər böyük qiymətlər alaraq qeyri-məhdud artmaqda davam edəcəkdir. Qabaqcadan götürülmüş istənilən böyük hər bir ədədi üçün elə bir an gələcəkdir ki, bu andan başlayaraq dəyişəninin aldığı qiymətlər ədədindən böyük olacaqdır. -in belə artması qısa olaraq " sonsuzluğa yaxınlaşır" və ya "" kimi ifadə edilir.



şərtində funksiyasının dəyişmə xarakterini öyrənmək üçün funksiyasına və yaxud



ardıcıllığına baxaq. Bu ardıcıllığın bütün hədləri vahiddən fərqlidir, lakin dəyişəni 1, 2, 3,… qiymətlərini alaraq artdıqda funksiyasının aldığı qiymətlər vahidə çox yaxın olur. Bu yaxınlığın xarakteristikası həndəsi olaraq belədir:



,



1-in istənilən -ətrafı üçün elə ədədi (nömrəsi) var ki, ardıcıllığın nömrəsi -dən kiçik olmayan bütün hədləri 1-in həmin -ətrafında yerləşir:



Məsələn, olduqda olduqda olduqda kötürmək olar. Verilmiş ardıcıllığın bu xassəsini belə ifadə edirlər:



sonsuzluğa yaxınlaşdıqda 1 ədədi verilmiş ardıcıllığın limitidir.



Tutaq ki, ədədi və ardıcıllığı verilmişdir.



**Tərif.** Tutaq ki, istənilən (kiçik) müsbət ədədi veril­dikdə elə müsbət ədədi köstərmək olur ki, -in -dən kiçik olmayan bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənilir. Onda ədədinə -da **ardıcıllığının limiti** deyilir və



və ya



şəklində yazılır.

Tərifdə qeyd olunan bərabərsizlik

və ya ,



bərabərsizlikləri ilə eyniküclüdür. Buradan aydındır ki, ədədi -da ardıcıllığının limitidirsə, onda həmin ardıcıllığın -dən sonra gələn bütün hədləri ədədinin -ətrafında yerləşir. Bu halda ardıcıllığının ancaq sonlu sayda həddi intervalında yerləşməyə bilər.



Ardıcıllığın öz limitinə yaxınlaşma xarakteri müxtəlif ola bilər; ardıcıllıq artaraq, azalaraq və ya limit ətrafında rəqs edərək ona (öz limitinə) yaxınlaşa bilər.

**Misal 1.** ardıcıllığının limiti 1-ə bərabərdir. Doğrudan da, istənilən kiçik ədədi verildikdə



olması üçün olması və buna görədə götürmək kifayətdir.



Bu ardıcıllıq azalaraq öz limitinə yaxındır.

**Misal 2.** ardıcıllığının limiti 2 ədədidir.



.



Ardıcıllıq artaraq limitə yaxınlaşır.

**Misal 3.** ardıcıllığı sıfır ətrafında rəqs edərək ona yaxınlaşır.



.



Hər bir ardıcıllığın yalnız bir limiti ola bilər.

**Tərif.** Limiti olan ardıcıllığa **yığılan ardıcıllıq**, limiti olmayan ardıcıllığa isə **dağılan ardıcıllıq** deyilir.

**Misal 4.**



ardıcıllıqları dağılındır.

Qeyd etmək lazımdır ki, yığılan ardıcıllığın sonlu sayda həddini atmaq və ya ona sonlu sayda hədd əlavə etmək onun yığılmasına və limitinin qiymətinə təsir etmir.

Ardıcıllığın bütün hədləri müxtəlif olmaya da bilər. Bütün hədləri bir-birinə bərabər olan ardıcıllığa **stasionar ardıcıllıq** deyilir.

Stasionar ardıcıllığı yığılandır və onun limiti -ya bərabərdir.



.



Yığılan ardıcıllığın aşağıdakı xassələri vardır:

1. Yığılan ardıcıllıq məhduddur.
2. Monoton artan (azalan) və yuxarıdan (aşağıdan) məhdud ardıcıllığın limiti var.

**3. e ədədi**

Ümumi həddi



düsturu ilə verilmiş ardıcıllığın limitini hesablayaq.

Nyuton binomu düsturuna əsasən:

(1)



Bu bərabərliyi

(2)



şəklində də yazmaq olar.

(2) bərabərliyinin sağ tərəfində hər biri müsbət olan sayda hədd vardır.



Bu bərabərliyi üçün yazaq



(3)



(3) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hədlərin sayı olur. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hədlər (2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki uyğun hədlərdən kiçik olmadığından



(4)



olar.

Bundan başqa, (2) bərabərliyinə əsasən

(5)



(4) və (5) münasibətlərindən aydındır ki, (1) ardıcıllığı monoton azalmayan və yuxarıdan məhduddur. Belə ar­dıcıl­lığın isə ikinci xassəyə görə limiti var. Həmin limit ilə işarə olunur.



. (6)



irrasional ədəddir. Onun təqribi qiyməti hesablanmışdır:



ədədini çox zaman loqarifmin əsası hesab edirlər. əsasına görə ədədlərin loqarifminə natural loqarifm deyilir və "" ilə işarə olunur. ədədinin natural loqarifmi "" şəklində yazılır.



**§ 8. Funksiyanın limiti**

**1. Funksiyanın limitinin müxtəlif tərifləri**

**Tərif.** Tutaq ki, sonlu və ədədləri və istənilən ədədi üçün elə ədədi var ki, -in çoxluğundan götürülmüş və



bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

(1)



münəsibəti ödənilir. Onda ədədinə şərtində **funksiyasının limiti** deyilir və



(2)



və ya şəklində yazılır.



х



ε

ε

*й=А-ε*



0

A



olmasının hən­dəsi izahını verək. (1) bə­ra­bər­siz­liyini ona ekvivalent



və ya (3)



şəkilində yazaq. (3) bərabər­­sizliyi göstərir ki, nöqtəsi və düz xət­lə­ri arasında yerləşir.



Deməli, olması həndəsi olaraq, o deməkdir ki, (oxy) müstəvisi üzərində



və düz xətləri ilə hüdudlanmış ixtiyari zolaq üçün elə intervalı var ki, funksiyasının bu intervalındakı qrafikinin (qrafik üzərində -ya uyğun olan nöqtə müstəsna olmaqla) bütün nöqtələri ( əyrisi) həmin zolağın daxilində yerləşir.



**Tərif.** Tutaq ki, istənilən ədədi üçün elə ədə­di var ki, -in çoxluğundan götürülmüş və bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində münasibəti ödənilir. Onda deyirlər ki, nöqtəsində (və ya şərtində) funksiyasının limiti sonsuzluğa bərabərdir və bunu



və ya şəkilində yazırlar.



Limiti nöqtəsində sonsuzluğa bərabər olan funksiyasına həmin nöqtədə (və ya şərtində) **sonsuz böyüyən funksiya** deyilir.



Fərz edək ki, nöqtəsində limiti sonsuzluğa bərabər olan funksiyasının həmin nöqtəsinin müəyyən ətrafında yerləşən bütün nöqtələrində ( nöqtəsi müstəsna olmaqla) qiymətləri müsbətdir. Onda deyirlər ki, nöqtəsində funksiyasının limiti müsbət sonsuzluğa bərabərdir və



(4)



və ya şəkilində yazırlar.



(4) bərabərliyin dəqiq tərifini ifadə etmək üçün tərifdə bərabərsizliyini ilə əvəz etmək kifayətdir.



Limiti nöqtəsində sonsuzluğa bərabər olan funksiyasının həmin nöqtənin müəyyən ətrafındakı qiymətləri mənfi olduqda deyirlər ki, həmin funksiyanın -da limiti mənfi sonsuzluğa bərabərdir və



və ya ,



şəkilində yazırlar.

Tərifdən aydındır ki, və nöqtəsinin müəyyən ətrafında ( nöqtəsi müstəsna ola bilər) bərabərsizliyi ödənilirsə, onda .



Eləcədə, və nöqtəsinin müəyyən ətrafında bərabərsizliyi ödənilirsə, onda .



**Misal 2.** nöqtəsində funksiyasının limiti olar.



**Tərif.** Tutaq ki, sonlu və istənilən ədədləri verildikdə elə tapmaq olur ki, -in bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənilir. Onda ədədinə şərtində **funksiyasının limiti** deyilir və və ya şəklində yazılır.



Eyni qayda ilə funksiyanın limitinə və şərtlərində də tərif vermək olar.



**Tərif.** ədədinə () şərtində funksiyasının o zaman limiti deyilir ki, istənilən ədədinə qarşı elə olsun ki, -in bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənilir. Bunu



şəklində yazırlar.

Qeyd edək ki, funksiyasının və şərtində limiti varsa və



ödənilirsə, onda

.



Bunun tərsi də doğrudur.

Funksiyanın və şərtində limiti varsa və bərabər deyilsə:



,



onda şərtində funksiyanın limiti yoxdur.



Analoji olaraq



və s. limitlərinə də tərif vermək olar.

**Misal 3.** funksiyasının şərtində limiti 1-ə bərabərdir.



Doğrudan da, istənilən ədədinə qarşı ədədini seçsək, -in bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində



olacaqdır.

**2. Funksiyanın sağ və sol limiti**

**Tərif.** Tutaq ki, sonlu və ədədləri verildikdə istənilən ədədi üçün elə ədədi var ki, -in çoxluğundan götürülmüş və



(1)



bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

(2)



münasibəti ödənilir. Onda ədədinə şərtində (və ya nöqtəsində) funksiyasının **sol limiti** deyilir və



(3)



şəklində işarə olunur.

Bu tərifdəki (1) bərabərsizliyini ilə əvəz etsək, funksiyasının nöqtəsində **sağ limitinin** tərifini alarıq. Funksiyanın sağ limiti



(4)



şəkilində işarə olunur.

Funksiyasının nöqtəsində sol və sağ limitini uyğun olaraq və ilə işarə edirlər.



**Teorem.** funksiyasının nöqtəsində limitinin olması üçün onun həmin nöqtədə sol və sağ limitlərinin varlığı və bir-birinə bərabər olması zəruri və kafidir.



və ədədlərinin hər hansı biri və ya hər ikisi və olduqda da funksiyanın sol və sağ limiti (sonlu və ya sonsuz) uyğun şəkildə təyin olunur. Məsələn, funksiyası üçün



və .



İndi nöqtəsində limiti olan funksiyasının aşağıdakı xassələrini qeyd edək:



**Teorem 1.** nöqtəsində sonlu limiti olan funksiyası həmin nöqtənin müəyyən () ətrafında ( nöqtəsi müstəsna olmaqla) məhduddur.



**Teorem 2.** funksiyasının bir nöqtəsində müxtəlif iki və limiti iola bilməz.



**Teorem 3.** və olduqda nöqtəsinin elə () ətrafı var ki, -in bu ətrafındakı bütün qiymətlərində ( müstəsna olmaqla)



bərabərsizliyi ödənilir.

Xüsusi halda olduqda nöqtəsinin elə () ətrafı var ki, -ın bu ətrafındakı bütün qiymətlərində ( müstəsna olmaqla) bərabərsizliyi ödənilir.



Qeyd olunan teoremlərdə əvəzinə , simvollarının hər birini götürmək olar.



**3. Sonsuz kiçilən funksiyalar**

Limiti nöqtəsində sıfıra bərabər olan funksiyasına həmin nöqtədə və ya -da **sonsuz kiçilən funksiya** deyilir.



**Teorem 1.** ədədi şərtində -ın limiti olması üçün fərqinin şərtində sonsuz kiçilən olması zəruri və kafidir.



**Misal 4.** olduqda çünki .



**Teorem 2.** şərtində funksiyası sonsuz kiçilən və sıfıra çevrilməyən funksiyadırsa, onda şərtində sonsuz böyüyən funksiya olar. şərtində funksiyası sonsuz böyüyən olarsa, onda sonsuz kiçilən olar.



**Teorem 3.** Sonsuz kiçilən funksiya ilə məhdud funksiyanın hasili sonsuz kiçilən funksiyadır.

Bu teoremdən alınır ki, sonsuz kiçilən iki funksiyanın hasili də sonsuz kiçiləndir və sabit ədədlə sonsuz kiçilən funksiyanın hasili sonsuz kiçilən funksiyadır.

**Teorəm 4.** Sonlu sayda sonsuz kiçilən funksiyaların cəbri cəmi də sonsuz kiçilən funksiyadır.

**4. Limitlər haqqında teoremlər**

**Teorem 1.** Sonlu limitləri olan sonlu sayda funksiyalarının cəminin limiti onların limitləri cəminə bərabərdir



.



**Teorem 2.** Sonlu limitləri olan sonlu sayda funksiyalarının hasilinin limiti onların limitləri hasilinə bərabərdir



.



Bu teoremlərdən aşağıdakı nəticələr alınır:

**Nəticə 1.** Sabit vuruğu limit işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

.



Bu sabitin limitinin özünə bərabər olmasından alınır.



**Nəticə 2.** Sonlu limiti olan və funksiyalarının fərqinin limiti onların limitləri fərqinə bərabərdir



.



**Nəticə 3.** Sonlu limiti olan funksiyası üçün



bərabərliyi doğrudur.

**Teorem 3.** və funksiyalarının sonlu limitləri varsa və olarsa, onların nisbətinin limiti bu funksiyaların limitlərinin nisbətinə bərabərdir:



.



**Misal 5.** limitini hesablayın.



**Həlli.** Limitlər haqqında qeyd etdiyimiz 3-cü, 1-ci və 2-ci teoremlərdən ardıcıl istifadə etsək:

.



**Teorem 4.** -in -ın müəyyən ətrafındakı bütün qiymətlərində bərabərsizliyi ödənilirsə və limiti sonludursa, onda



bərabərsizliyi də ödənilər.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

**Nəticə.** və funksiyasının şərtində limiti varsa və -in -ın müəyyən ətrafındakı bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənilirsə, onda:

.



**Teorem 5.** Əgər sonlu



limiti varsa və -in -ın müəyyən ətrafındakı bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənilirsə, onda:



olar.

**5. Görkəmli limitlər.**

Aşağıdakı limitlərə uyğun olaraq **birinci** və **ikinci görkəmli limitlər** deyilir:

, .



Bu limitlərdən geniş istifadə olunduğuna görə onların doğruluğunu isbat edək.

**1.Birinci görkəmli limit. .** (1)



х



**İsbatı.** Əvvəlcə götürək. . Şəklə əsasən , (2)



. (3)



, (4)



, (5)



. (6)



Şəkildən və (2)-(6) bərabərliklərindən alırıq:



Sonuncu bərabərsizliyin bütün hədlərini -ə bölək:



. (7)



Biz (7) bərabərsizliyinin doğruluğunu olan hal üçün göstərdik. (7) bərabərsizliyi olan halda da doğrudur. Doğrudan da, olduğunu nəzərə alıb, (7)-də *x* əvəzinə *–x* yazsaq buna əmin olmaq olar.



olduğu üçün bərabərsizlikdə limitə keçmə teoreminə əsasən (7)-dən (1)-in doğruluğu alınır.



**2. İkinci görkəmli limit.**

**.** (8)



**İsbatı.** olan hal üçün (*n*- natural ədəddir) (8)-in doğruluğunu isbat etmişik:



.



İndi isə fərz edək ki, *x* həqiqi ədəd olmaqla . Aydındır ki, hər bir kifayət qədər böyük həqiqi ədədi üçün elə *n* natural ədədi vardır ki,



(9)



olur. (9)-dan alırıq:

. (10)



(9) və (10)-a əsasən

. (11)



(9)-dan alınır ki, şərtində . Digər tərəfdən olmasından istifadə edərək yaza bilərik:



, (12)



. (13)



(11)-(13)-ə əsasən bərabərsizlikdə limitə keçmə teoreminin şərtləri ödənilir. Ona görə şərtində (11)-də limitə keçib, (12), (13)-ü nəzərə alsaq, (8)-i alarıq.



**3.** (14)



**İsbatı.** (8)-də əvəz edək. Aydındır ki, şərtində . Onda (8)-dən alırıq:



. (15)



(15)-də *y* əvəzinə *x* yazsaq, (14) alınır.

**4.** (16)



**İsbatı.** . (14)-ə asasən sonuncu bərabərsizlikdən alırıq:



.



(16) düsturunda götürdükdə və olduğu üçün



düsturunun doğruluğu alınır.

**5.**  (17)



**İsbatı.**  əvəz edək. Buradan alınır. Onda . Digər tərəfdən şərtinə bərabərliyindən olduğu alınır. Bunları və (15)-i nəzərə alıb, (17)-nin sol tərəfindəki limiti belə çevirmək olar:



(17)-də götürdükdə aşağıdakı limiti alırıq:



**Misal 6.** limiti hesablamalı.



**Həlli.** .



**Misal 7.** limiti hesablamalı.



**Həlli.** .



**6. Sonsuz kiçilənlərin müqayisəsi**

Tutaq ki, sonsuz kiçilənləri eyni zamanda bir arqumentinin funksiyalarıdır və bunların sıfıra yaxınlaşması arqumentinin limitinə və ya sonsuzluğa yaxınlaşması şərtində olur. Bu kəmiyyətlərin nisbətinə baxaraq, onların sıfıra necə yaxınlaşmalarını xarakterizə edək.



**Tərif 1.** Tutaq ki, nisbətinin limiti var və bu limit sıfırdan fərqlidir, yəni onda , sonsuz kiçilənlərinə eyni tərtibli sonsuz kiçilənlər deyilir.



**Misal 8.** , şərtində sonsuz kiçilənlərdir. olduğundan həmin sonsuz kiçilənlər eyni tərtibli sonsuz kiçiləndir.



**Tərif 2.** Əgər iki sonsuz kiçilənin nisbəti sıfıra yaxınlaşırsa, yəni olursa, onda sonsuz kiçiləninə -ya nəzərən **yüksək tərtibli sonsuz kiçilən** deyilir.



**Misal 9.** şərtində sonsuz kiçilənləri üçün olduğundan şərtində sonsuz kiçiləni -ya nəzərən yüksək tərtibdən sonsuz kiçiləndir.



**Tərif 3.** Əgər , yəni ilə eyni tərtibli sonsuz kiçilənlər olarsa, onda sonsuz kiçiləninə -ya nəzərən  **tərtibli sonsuz kiçilən** deyilir.



**Misal 10.** şərtində sonsuz kiçilənlərdir.



olduğundan, şərtində -ya nəzərən 3 tərtibli sonsuz kiçiləndir.



**Tərif 4.** İki sonsuz kiçilənin nisbətinin limiti 1-ə yaxınlaşırsa, yəni olursa, onda , sonsuz kiçilənlərinə **ekvivalent sonsuz kiçilənlər** deyilir və kimi işarə edilir.



**Misal 11.** , şərtində ekvivalent sonsuz kiçilənlərdir.



olduğundan şərtində .



Ekvivalent sonsuz kiçilənlərin, limitlərin hesablanmasına tətbiqi üçün aşağıdakı xassəni qeyd edək:

Əgər və olarsa, onda olar. Yəni, sonsuz kiçilənlərin nisbətinin limiti onlara uyğun ekvivalent sonsuz kiçilənlərin nisbətinin limitinə bərabərdir:



.



**Misal 12.** hesablamalı.



**Həlli.**  şərtində . Onda .



**§ 9. Funksiyanın kəsilməzliyi**

**1. Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi**

Fərz edək ki, funksiyası nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş funksiyadır.



**Tərif 1.** Əgər

, (1)



bərabərliyi ödənilirsə, onda funksiyasına nöqtəsində (və ya qiymətində) **kəsilməyən funksiya** deyilir.



(1) bərabərliyi ödənilmədikdə, deyirlər ki, funksiyası nöqtəsində kəsilir və nöqtəsi -in **kəsilmə nöqtəsidir**.



Funksiyanın nöqtəsində kəsilməzliyini təyin edən (1) bərabərliyini



(2)



şəkilində də yazmaq olar.

Funksiya limitinin tərifindən istifadə etsək, kəsilməzliyin tərifini aşağıdakı kimi də vermək olar.

**Tərif 2.** Tutaq ki, istənilən ədədi üçün elə ədədi var ki, -in bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində



bərabərsizliyi ödənilir. Bu halda funksiyasına nöqtəsində **kəsilməyən funksiya** deyilir.



Əgər funksiyası sağdan qapalı yarım intervalında təyin olunmuşdursa, onda onun nöqtəsində soldan kəsilməzliyindən, soldan qapalı yarım intervalında təyin olunduqda isə onun nöqtəsində sağdan kəsilməzliyindən danışmaq olar.



**Tərif 3.** Əgər bə­ra­bər­liyi ödənilərsə, onda funksiyasına nöqtə­sində ( nöqtəsində) **soldan (sağdan) kəsilməyən funksiya** deyilir.



Funksiya təyin oblastının bütün nöqtələrində və yaxud müəyyən hissəsində kəsilməyən ola bilər. Məsələn, bütün ədəd oxunda təyin olunmuş funksiyası təyin oblastının hər bir nöqtəsində kəsilməyəndir. Doğrudan da istənilən nöqtəsində



bərabərliyi ödənilir.

**Tərif 4.** çoxluğunun (parçanın, intervalın və s.) hər bir nöqtəsində kəsilməyən funksiyasına həmin **çoxluqda kəsilməyən** funksiya deyilir.



funksiyası intervalında kəsilməyən funksiyadır.



**Tərif 5.** funksiyasının nöqtəsindəki ar­tı­mı üçün və yaxud münasibəti ödənilirsə, onda funksiyasına  **nöqtəsində kəsilməyən funksiya** deyilir.



Buradan görünür ki, funksiyasının nöqtəsində kəsilməyən olması üçün arqumentin həmin nöqtədəki sonsuz kiçilən artımına funksiyanın da sonsuz kiçilən artımı uyğun olmalıdır. Məsələn, (sabit) və funksiyaları istənilən nöqtədə kəsilməyəndir.



Doğtrudan da



və



olduğundan

.



**Misal 1.** funksiyasının kəsilməzliyini araşdırmalı.



**Həlli.**  nöqtəsində arqumentə artımı verərək funksiyanın uyğun artımını hesablayaq:



.



Buradan olması aydındır. Axırıncı bərabərlik köstərir ki, funksiyası nöqtəsində kəsiləməyən funksiyadır. nöqtəsində isə funksiyası təyin olunmayıb, çünki kəsrinin məxrəci nöqtəsində sıfıra çevrilir, sıfıra isə bölmək olmaz. Digər tərəfdən olması aydındır.



**Misal 2.** funksiyası istənilən nöqtəsində kəsilməyəndir. Doğrudan da,



və olduğundan .



Nöqtədə kəsilməyən funksiyanın aşağıdakı xassələrini qeyd edək və burada baxdığımız funksiyaların hamısının verilmiş nöqtəsini öz daxilinə alan bir intervalda təyin olunduğunu fərz edək.



**Teorem 1.** Verilmiş nöqtəsində kəsilməyən funksiyası həmin nöqtənin müəyyən ətrafında məhduddur.



**Teorem 2.** nöqtəsində kəsilməyən sonlu sayda funksiyalarının cəmi və hasili də həmin nöqtədə kəsilməyəndir.



**Nəticə.** və funksiyaları nöqtəsində kəsilməyən funksiyalar və ixtiyari sabit ədəd olduqda və funksiyaları həmin nöqtədə kəsilməyən olar.



**Teorem 3.** Əgər və funksiyaları nöqtəsində kəsilməyəndirsə və şərti ödənilirsə, onda nisbəti həmin nöqtədə kəsilməyəndir.



**Teorem 4.** Əgər funksiyası nöqtəsində və funksiyası nöqtəsində kəsilməyəndirsə, onda mürəkkəb funksiyası nöqtəsində kəsilməyəndir.



İndi elementar funksiyaların kəsilməzliyini qeyd edək. (sabit) və funksiyaları bütün ədəd oxunda kəsilməyən olduğundan kəsilməyən funksiyaların hasili haqqındakı teoremə görə (-natural ədəddir) funksiyası da bütün ədəd oxunda kəsilməyən olar. Onda



çoxhədlisi də bütün ədəd oxunda kəsilməyən funksiyadır, hər bir



rasional funksiyası isə iki kəsilməyən funksiyanın nisbəti olduğundan, məxrəcin sıfıra çevrilmədiyi bütün nöqtələrdə kəsilməyən olar.

üstlü funksiyası bütün ədəd oxunda loqarifmik funksiyası isə intervalında kəsilməyəndir.



və bütün ədəd oxunda kəsilməyən olduğundan onların nisbəti olan



və



funksiyaları da məxrəcin sıfıra çevrilmədiyi bütün nöqtələrdə kəsilməyən olar.

**Teorem.** Bütün elementar funksiyalar təyin oblast­ları­nın hər bir nöqtəsində kəsilməyəndir.

**2.** **Kəsilmə nöqtələri və parçada kəsilməyən funksiyanın**

**xassələri**

Limitin tərifinə əsasən funksiyasının nöqtəsində kəsilməyən olması üçün



(1)



münasibəti ödənməlidir. Deməli, nöqtəsi funksiyasının kəsilmə nöqtəsidirsə, onda (1) münasibətindəki bərabərliklərin heç olmasa biri pozulmalıdır.



**Tərif 1.** Əgər nöqtəsi funksiyasının kəsilmə nöqtəsidirsə və bu nöqtədə funksiyanın sonlu və sol və sağ limitləri varsa, onda nöqtəsinə funksiyasının **birinci növ kəsilmə nöqtəsi** deyilir.



funksiyasının kəsilmə nöqtəsində



münasibəti ödənildikdə, nöqtəsinə -in **aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsi** deyilir. Bu halda funksiya nöqtəsində təyin olunmuş olarsa, onun həmin nöqtədəki qiymətini dəyişərək



qəbul etsək, funksiyası nöqtəsində kəsilməyən olar. Funksiya nöqtəsində təyin olunmamışdırsa, onda həmin nöqtədə funksiyanı bərabərliyi ilə təyin edərək, nəticədə nöqtəsində kəsilməyən funksiya alarıq.



Funksiyanın kəsilmə nöqtəsində



münasibəti ödənildikdə, nöqtəsinə -in **sonlu sıçrayışlı kəsilmə nöqtəsi** deyilir və



fərqi funksiyasının nöqtəsindəki sıçrayışı adlanır.



**Tərif 2.** Əgər funksiyasının kəsilmə nöqtəsindəki (sol) və (sağ) limitlərinin heç olmazsa biri yoxdursa ya da sonsuzluğa bərabərdirsə, onda nöqtəsinə funksiyasının **ikinci növ kəsilmə nöqtəsi** deyilir.



**Misal 3.**



funksiyası nöqtəsində kə­si­ləndir. nöqtəsi bu funk­si­yanın birinci növ (sonlu sıç­rayışlı) kəsilmə nöqtəsidir. və oldu­ğundan nöqtəsində funk­siyasının sıçrayışı olar.

*у*

х

1

-1

0



**Misal 4.** funksiyası nöqtəsində kəsilir. nöqtəsi bu funksiyanın birinci növ (aradan qaldırıla bilən) kəsilmə nöqtəsidir.



olduğundan qəbul etsək, funksiya nöqtəsində kəsilməyən olar.



**Misal 5.**



funksiyası, nöqtəsində kəsiləndir. nöqtəsi funksiyanın ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir. Bu nöqtədə: və .



**Misal 6.** funksiyası üçün ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir. Bu nöqtədə və limitlərinin heç biri yoxdur.



*у*



0

1



*у*



0



İndi parçasında kəsilməyən funksiya­sının bir sıra əsas xassələrini şərh edək. Qeyd etmək lazımdır ki, funksiyasının parçanın sol uc nöqtəsində kəsilməzliyi dedikdə onun həmin nöqtədə sağdan kəsilməyən , və sağ üç nöqtəsində kəsilməzliyi dedikdə isə həmin nöqtədə soldan kəsilməzliyi başa düşülür.



**Xassə 1 (Veyerştrassın birinci teoremi).**  Sonlu parçasında kəsilməyən funksiyası həmin parçada məhduddur.



**Xassə 2 (Veyerştrassın ikinci teoremi).** Sonlu parçasında kəsilməyən funksiyası bu parçanın heç olmasa bir nöqtəsində özünün həmin parçadakı ən kiçik , heç olmasa bir nöqtəsində isə özünün ən böyük qiymətini alır, yəni



.



**Xassə 3.** parçasında kəsilməyən funksiyası həmin parçanın uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda və  **nöqtələri arasında yerləşən ən azı bir nöqtəsi var ki, bu nöqtədə**  funksiyası sıfra çevrilir:



**.**



**olduqda nöqtəsinə**  funksiyasının sıfırı deyilir.



**Xassə 4.** parçasında kəsilməyən funksiyası həmin parçanın uc nöqtələrində bərabər olmayan qiymətlərini alırsa, onda həmin və ədədləri arasında yerləşən hər bir ədədi üçün parçasında yerləşən **ən azı bir nöqtəsi var ki, olar.**



**§ 10. Törəmə**

**1. Funksiyanın törəməsi**

Tutaq ki, funksiyası intervalında təyin olunmuşdur və bu intervalın qeyd olunmuş nöqtəsidir. Arqumentin nöqtəsində aldığı artımına uyğun , olar. fərqinə funksiyanın artımı,



(1)



nisbətinə isə funksiya artımının arqument artımına nisbəti deyirlər

**Tərif.** Arqumentin artımı istənilən qayda ilə sıfra yaxınlaşdıqda (1) nisbətinin sonlu limiti varsa, onda həmin limitə verilmiş funksiyanın **törəməsi** deyilir və ilə işarə olunur.



Tərifdən alırıq ki,

.



Verilmiş nöqtəsində törəməsi olan funksiyaya həmin **nöqtədə diferensiallanan**  funksiya deyilir. intervalının hər bir nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin **intervalda diferensiallanan**  funksiya adlanır.



**Misal 1.**  olduqda funksiyasının artımını və nisbətini tapmalı.



**Həlli.**



**Misal 2.** Törəmənin tərifindən istifadə edərək, funksiyasının törəməsini tapmalı.



**Həlli.** Arqumentin artımına uyğun funksiya artımı



olduğundan törəmənin tərifindən istifadə etsək,

.



Deməli, olur.



**2.** **Törəmənin həndəsi və mexaniki mənası**

Məlumdur ki, düz xəttin, absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə həmin düz xəttin **bucaq əmsalı** deyilir.



tənliyi ilə verilmiş əyrisinin nöq­təsində toxunanının bu­caq əmsalını tapaq: nöqtəsinin absisi , nöqtəsinin absisi isə olsun. Onda:



,



olduğundan və ya olar. Buradan .



Aydındır ki, nöqtəsi əyri boyunca nöqtəsinə yaxınlaşdıqda artımı sıfra yaxınlaşır: . Onda



.



Deməli, nöqtəsi əyri üzrə nöqtəsinə yaxınlaşdıqda kəsəni toxunanına yaxınlaşır və bu toxunanın bucaq əmsalı



bərabərliyi ilə təyin olunur. Buradan törəmənin **həndəsi** **mənası** alınır. funksiyasının nöqtəsində törəməsi funksiyanın qrafiki olan əyriyə nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir:



İndi verilmiş əyriyə nöqtəsində çəkilmiş toxunanının tənliyini yazaq. Düz xətlər nəzəriyyəsindən məlumdur ki, nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı olan düz xəttin tənliyi



(2)



şəklindədir. olduğundan



alınır.

**Misal 3.** funksiyasının qrafikinə nöq­tə­­sin­də çəkilmiş toxunanın tənliyini yazmalı.



**Həlli.** olduğu üçün toxunanın bucaq əmsalı olur. olduğundan (2) tənliyindən və ya olar.



əyrisinin nöqtəsindəki toxunanına həmin nöqtədə perpendikulyar olan düz xəttə əyrinin **normalı** deyilir. Bu normalın busaq əmsalını iki düz xəttin perpendikulyar olması şərtindən tapmaq olar: .



Onda nöqtəsində əyrisinə çəkilmiş normalın tənliyi



(3)



şəklində olar.

**Misal 4.** nöqtəsində əyrisinə çəkilmiş normalın tənliyini yazmalı.



**Həlli.** olduğuna görə, normalın bucaq əmsalı və olar. Onda normalın tənliyi və ya olar.



Məlumdur ki, hərəkət edən nöqtənin getdiyi yol zamandan asılıdır: . Bu funksiya cismin hərəkət qanunu adlanır. Nöqtənin zamanda getdiyi yol zamanda getdiyi yol olarsa, onda nöqtə zamanda məsafəsini getmiş olar.



Bu halda nisbəti, nöqtənin anından anına qədər müddətdəki hərəkətinin orta sürətinə bərabər olar. zaman fasiləsini çox kiçik götürsək, orta sürət anındakı sürətə çox yaxın olar. Ona görə də



və ya .



Buradan törəmənin **mexaniki mənası** alınır: hərəkət edən nöqtənin surəti gedilən məsafənin zamana görə törəməsinə bərabərdir.

**Misal 5.** Maddi nöqtə hərəkət qanunu ilə hərəkət edir. 2 saniyənin sonunda nöqtənin surətini təyin etməli.



**Həlli.** Gedilən yolun zamana görə törəməsini tapaq.



Buradan

, yaxud olar.



san olduqda



alınar.



**§11. Törəməalma qaydaları**

**1. Cəmin, hasilin və nisbətin törəməsi**

Tutaq ki, funksiyası parçasında təyin olunmuşdur və isə bu parçanın daxili nöqtəsidir.



**Teorem 1.** nöqtəsində diferensiallanan funksiyası həmin nöqtədə kəsilməyəndir.



Qeyd edək ki, bu teoremin tərsi doğru deyil, yəni verilmiş nöqtəsində kəsilməyən funksiyanın həmin nöqtədə törəməsi olmayada bilər. Məsələn, funksiyası nöqtəsində kəsilməyəndir, ançaq bu nöqtədə törəməsi yoxdur.



**Teorem 2.** Verilmiş nöqtəsində diferensiallanan sonlu sayda funksiyalarının cəmi də həmin nöqtədə diferensiallanandır və cəmin törəməsi toplananların törəmələri cəminə bərabərdir:



(4)



**Teorem 3.** Verilmiş nöqtəsində diferensiallanan və funksiyalarının hasili də həmin nöqtədə diferensiallanandır və hasilin törəməsi aşağıdakı qayda ilə hesablanır:



(5)



Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır:

**Nəticə 1.** Sabit vuruğu törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

.



**Nəticə 2.** nöqtəsində diferensiallanan və funksiyalarının fərqidə həmin nöqtədə diferensiallanandır və funksiyaların fərqinin törəməsi onların törəmələri fərqinə bərabərdir:



.



**Qeyd.** nöqtəsində diferensiallanan sonlu sayda funksiyalarının hasili də həmin nöqtədə diferensiallanandır və hasilin törəməsi aşağıdakı qayda ilə hesablanır.



Əgər olarsa, onda olar.



**Teorem 4.** nöqtəsində diferensiallanan və funksiyalarının nisbəti ( olduqda) həmin nöqtədə diferensiallanandır və nisbətin törəməsi aşağıdakı qayda ilə hesablanır.



. (6)



Əgər sabit ədəd olarsa, onda (6) bərabərliyindən



,



bərabərlikləri alınar.

**2. Mürəkkəb və tərs funksiyanın törəməsi**

Əgər funksiyası nöqtəsində, funksiyası uyğun nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda mürəkkəb funksiyası da nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi , yaxud düsturu ilə hesablanılır.



Tutaq ki, funksiyası parçasında təyin olunmuş, kəsilməyən, monoton funksiyadır və onun parçasında kəsilməyən tərs funksiyası var.



Əgər funksiyası nöqtəsində diferensiallanandırsa və olarsa, onda onun tərsi funksiyası da uyğun nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi



düsturu ilə hesablanır. Bu düsturu şəkilində də yazmaq olar.



**3. Əsas elementar funksiyaların törəməsi**

**a) loqarifmik funksiyasının törəməsi**



Fərz edək ki, arqumenti artımı aldıqda funksiyası da uyğun olaraq



artımı alar. Onda



qəbul etsək, axırıncı ifadəni



şəkiləndə yazmaq olar. şərtində olduğundan



.



Deməli, və yaxud



. (7)



Xüsusi halda götürsək:



. (8)



İndi funksiyasının törəməsini hesablayaq. Bu funksiya -in sıfırdan fərqli bütün qiymətlərində təyin olunmuşdur:



və olduğundan



. (9)



düsturunu alarıq.



düsturunu nəzərə alsaq, onda:

.



Tutaq ki, funksiyası diferensiallanandır və . Onda mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması qaydasına və (9) düsturuna əsasən



. (10)



Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki kəsrinə funksiyasının **loqarifmik törəməsi** deyilir. Əgər funksiyanın loqarifmik törəməsi məlum olarsa, (10) düsturu vasitəsi ilə özünün törəməsini tapmaq olar:



.



Bu üsula **loqarifmik diferensiallama üsulu** deyilir.

**b) üstlü funksiyanın törəməsi:**

üstlü funksiyasının loqarifmik diferensiallama üsulu ilə törəməsini tapaq:



. (11)



Xüsusi halda, olarsa,



Mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması qaydasına əsasən (11) düsturundan

, (12)



xüsusi halda,

. (13)



**c) qüvvət funksiyasının törəməsi.**

(-istənilən həqiqi ədəddir) qüvvət funksiyasının törəməsini loqarifmik diferensiallama üsulu ilə tapaq:



.



. (14)



Xüsusi halda olduqda:



.



olduqda:



və s. alarıq. Bundan başqa, (14) düsturuna görə

(15)



**ç) üstlü-mürəkkəb funksiyanın törəməsi.**

şəklində funksiyaya **üstlü-mürəkkəb funksiya** deyilir. və funksiyaları diferensiallanan olduqda funksiyası da diferensiallanandır və onun törəməsini loqarifmik diferensiallama üsulu ilə tapmaq olar.



. (16)



**d) funksiyasının törəməsi.**



Arqumentə artımı verib funksiyanın uyğun artımını hesablayaq:



,



.



.



,



. (17)



**e) funksiyasının törəməsi.**



Çevirmə düsturuna görə

.



Buradan



Ümumi halda,

. (18)



**ə) funksiyasının törəməsi.**



Kəsrin törəməsini hesablama qaydasına əsasən

,



.



Ümumi halda,

. (19)



**f) funksiyasının törəməsi.**



,



.



. (20)



**g) funksiyasının törəməsi.**



funksiyasının tərs funksiyası olar. Onda tərs funksiyanın törəməsi düsturuna görə



,



intervalında olduğundan



.



Ümumi halda,

. (21)



**ğ) funksiyasının törəməsi.**



funksiyasının tərs funksiyası olar. Onda



, .



Ümumi halda,

. (22)



**h) və funksiyasının törəməsi.**



funksiyasının tərs funksiyası olar. Onda



.



Ümumi halda,

. (23)



Eyni qayda ilə:

,



. (24)



**x) hiperbolik funksiyaların törəməsi.**

Hiperbolik funksiyaların tərifinə əsasən onların törəməsini hesablamaq olar:

1)



2)



3)



4)



Beləliklə əsas elementar funksiyaların törəməsi düstürları cədvəlini tərtib etmək olar.



Qeyd: .



**Misal 6.** funksiyasının törəməsini tapmalı.



**Həlli.** (4) bərabərliyindən,

alınar.



**Misal 7.** funksiyasının törəməsini tapmalı.



**Həlli.**

.



**Misal 8.** funksiyasının törəməsini tapmalı.



**Həlli.** Əgər, əvəzləməsini aparsaq mürəkkəb funksiyası alınar. Mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması qaydasına əsasən



.



**Misal 9**. Verilmiş funksiyasının



törəməsini tapmalı.

**Həlli.** Loqarifmik diferensiallama üsülunu tətbiq etsək bərabərliyini yaza bilərik. Buradan



və ya



.



**Misal 10.** funksiyasının törəməsini tapmalı.



**Həlli.** (16) düsturundan istifadə edək:



**4. Parametrik və qeyri aşkar şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi**

Fərz edək ki, tənlikləri vasitəsi ilə funksiyası təyin olunmuşdur.



Əgər funksiyalarının törəmələri varsa və olarsa, onda funksiyası diferensiallanandır və onun törəməsi



və ya



düsturu ilə hesablanır.

**Misal 11.** funksiyasının törəmə­sini tapmalı.



**Həlli.** Funksiya parametrik şəkildə verildiyindən məlum düsturuna əsasən yaza bilərik:



oldugundan



alınar.

Tutaq ki, funksiyası qeyri-aşkar şəkildə



(25)



tənli­yi vasitəsi ilə verilmişdir. Bu funksiyanı aşkar şəklə gətirmədən onun törəməsini tapaq. Bu məqsədlə -ə -in funksiyası kimi baxmaqla (25) bərabərliyinin hər iki tərəfini -ə nəzərən diferensiallayaq. Nəticədə alınan bərabərliyi -ə nəzərən həll etməklə törəməsi tapılır.



**Misal 12.** qeyri aşkar funksiyasının törəməsini tapmalı.



**Həlli.** -ə - dəyişəninin funksiyası kimi baxıb -ə nəzərən törəmə alaq:



.



Bu ifadəni -ə nəzərən həll etsək



alınar.

**§ 12.Funksiyanın diferensialı və onun həndəsi mənası.**

**1. Funksiyanın diferensialı**

Fərz edək ki, funksiyasının nöqtəsində törəməsi var. Onda törəmənin tərifinə görə



və ya . Buradan funksiyanın artımı üçün həmin nöqtədə



(1)



bərabərliyini yaza bilərik.

Göründüyü kimi funksiya artımı iki hissədən ibarətdir. Birinci hissəsinə funksiya artımının **baş hissəsi** deyilir.



**Tərif.** Diferensiallanan funksiyasının nöqtəsində artımının baş hissəsinə onun nöqtəsində **diferensialı** deyilir və və ya ilə işarə olunur:



və ya .



Asanlıqla göstərmək olar ki, arqumentin artımı onun diferensialına bərabərdir, yəni . Bunu nəzərə alaraq funksiyanın diferensialını



şəklində yaza bilərik. Deməli, **funksiyanın diferensialı onun törəməsi ilə arqumentin diferensialı hasilinə bərabərdir.**

**Misal 1.** funksiyasının diferensialını tapmalı.



**Həlli.** olduğundan



və ya .



**2. Diferensialın həndəsi mənası.**

funksiyasının qrafiki üzərində nöqtəsi götürək. Bu nöqtədə funksiya qrafikinə çəkilən toxunan düz xətti olsun.



Absis oxu üzərindəki nöqtəsindən ordinat oxuna paralel qaldırılan düz xətt toxunanını nöqtəsində kəsər. Düzbu­caqlı üçbucağından



.



və olduğundan



kəmiyyəti, absisi artımını aldıqda toxunanı ordinatının aldığı artımdır. Deməli, funksiyasının diferensialı funksiyanın qrafikinə nöqtəsində çəkilmiş toxunanın toxunma nöqtəsinin absisi Δ*x* artımı aldıqda ordinatının aldığı artımına bərabərdir.



Funksiyanın diferensialı onun törəməsi ilə arqumentin dife­rensialı hasilinə bərabər olduğundan, funksiyanın dife­rensialını tapmaq üçün onun törəməsini hesablamaq lazımdır. Buna görə də həm törəməalma və həm də diferensialı tapma əməllərinə birlikdə **diferensiallama əməli**deyirlər.

və funksiyaları diferensiallanan olduqda, onların diferensialları



şəkilində olduğundan funksiyaların cəminin, fərqinin, hasilinin və nisbətinin diferensialını hesablamaq üçün



düsturlarının doğruluğunu qeyd etmək olar.

Əsas elementar funksiyaların törəmələri düsturları cəd­vəlinə əsasən onların diferensialları cədvəlini tərtib etmək olar:

1. (-sabit ədəddir),



2. ,



3.



4.



5.



6.



7.



8.



9.



10.



11.



12.



13.



14.



15.



**3. Diferensialın təqribi hesablamaya tətbiqi**



olduğundan, funksiya artımının ikinci hissəsi artımına nəzərən daha yüksək tərtibdən sonsuz kiçiləndir. Ona görə də



təqribi bərabərliyini yaza bilərik. Buradan



və ya

. (3)



Bu bərabərlikdən istifadə edərək, bir çox funksiyaların təqribi qiymətlərini hesablamaq üçün sadə düsturlar almaq olar.

**Misal 2.** ifadəsinin təqribi qiymətini hesablamalı.



**Həlli.** funksiyasına baxaq qəbul edək.



olduğu üçün



**§ 13. Yüksək tərtibli törəmə və diferensiallar**

funksiyası intervalında diferensiallanan olduqda onun törəməsinin qiyməti baxılan nöqtəsindən asılıdır. Buna görə də -in funksiyası olan -in törəməsindən danışmaq olar.



**Tərif.** -in törəməsinə funksiyasının **ikitərtibli törəməsi** və ya **ikinci törəməsi** deyilir və kimi işarə olunur.



Deməli, .



**Misal 1.** olarsa, -i tapmalı.



**Həlli.**  olduğundan əvvəlcə -i tapaq.



olar.

Əgər funksiya parametrik şəkildə verilərsə, onun ikinci tərtib törəməsi

, (1)



şəklində olur.

**Misal 2.** olarsa, -i tapmalı.



**Həlli.** Əvvəlcə törəmələrini tapaq:



Onda (1) bərabərliyinə görə



funksiyasının ikinci törəməsinin törəməsinə onun **üçüncü törəməsi** və yaxud **üçtərtibli törəməsi** deyilir və ilə işarə olunur:



.



Ümumiyyətlə, funksiyasının -tərtibli törəməsinin törəməsinə onun **-tərtibli törəməsi** deyilir və ,



ilə işarə olunur. Beləliklə,

.



Törəmənin tərtibini qüvvət üstü ilə qarışdırmamaq üçün onu mötərizədə yazırlar.

Verilmiş nöqtədə -tərtibli törəməsi olan funksiyaya həmin nöqtədə  **dəfə diferensiallanan** və yaxud **-ci tərtibdən diferensiallanan** funksiya deyilir.



Fərz edək ki, və funksiyaları intervalında dəfə diferensiallanandırlar. Bu halda yüksək tərtibli törəmələrin aşağıdakı xassələrini qeyd etmək olar:



1. Sabit vuruğu -tərtibli törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:



.



2. dəfə diferensiallanan funksiyaların cəbri cəminin -tərtibli törəmələri, onların -tərtibli törəmələrinin cəbri cəminə bərabərdir:



.



3. 2 funksiya hasilinin -tərtibli törəməsi aşağıdakı düsturla hesablanılır:



(2)



(2) düsturuna **Leybnis düsturu** deyilir.

**Misal 3.** -ni tapmalı.



**Həlli.**  və qəbul edək.



olduğundan (2) ifadəsinə görə alınır ki,



Qeyd etmək lazımdır ki, istənilən dəfə diferensiallanan funksiya üçün -tərtibli törəmə düsturu çıxarmaq mümkün deyil (belə funksiyalardan ardıcıl olaraq törəmə alınır). Lakin bəzi funksiyalar üçün -tərtibli törəmə düsturunu çıxarmaq mümkün olur.



**Misal 4.** funksiyasının -ci tərtib törəməsini tapmalı.



**Həlli.** , ,



,



**………………**

.



**Misal 5.** olarsa, -i tapmalı.



**Həlli.**



Xüsusi halda olarsa, onda , .



**Misal 6.** olarsa, -i tapmalı.



**Həlli.**



Tutaq ki, funksiyası diferensiallanan funksiyadır və onun diferensialı şəklindədir. funksiyası -dən xətti asılıdır. -isə arqumentinin artımı olduğundan, arqumentindən asılı deyil. Ona görədə, ifadəsi arqumentindən asılıdır və onu diferensiallamaq olar.



**Tərif.** Funksiya diferensialının diferensialına həmin funksiyanın **ikinci diferensialı** və ya ikitərtibli diferensialı deyilir və və s. kimi işarə olunur.



Diferensialın tərifindən istifadə edərək, ikinci tərtib diferensialın ifadəsini tapaq.

. (2)



Eyni qayda ilə

.



Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək



alınar.

**Misal 7.** funksiyasının ikinci tərtib diferensialını tapmalı.



**Həlli.** Əvvəlcə mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması qaydasından istifadə edərək verilmiş funksiyadan ardıcıl iki dəfə törəmə alıb (2) ifadəsində nəzərə alaq.



Onda,

olar.



**§ 14.Diferensial hesabının əsas teoremləri (Roll Loqranj və Koşi teoremləri)**

Roll, Laqranj və Koşi teoremləri diferensial hesabının əsas teoremləri adlanır. Bu teoremlərə bəzən «orta qiymətlər haqqında teoremlər» də deyilir.

**1.Teorem (Roll teoremi).** parçasında kəsilməyən, intervalında diferensiallanan və həmin parçanın uc nöqtələrində bərabər qiymətləri alan funksiyası üçün həmin intervalında yerləşən heç olmasa bir elə nöqtəsi var ki, bu nöqtədə funksiyanın törəməsi sıfra bərabərdir, yəni .



**İsbatı.** Funksiya parçasında sabit olduqda in törəməsi intervalının bütün nöqtələrində sıfra bərabərdir və nöqtəsi olaraq istənilən nöqtəni götürmək olar.



İndi fərz edək ki, funksiyası sabit deyil. O, parçasında kəsilməyən olduğundan Veyerştrasın ikinci teoreminə görə özünün dəqiq aşağı () və dəqiq yuxarı () sərhədlərinin hər birini həmin parçanın heç olmasa bir nöqtəsində alır. Sabit olmayan funksiyası üçün olar və şərtinə görə funksiya və sərhədlərinin heç olmasa birini parçasının daxili nöqtəsində alar. Tutaq ki, funksiyası dəqiq aşağı sərhəddini daxili nöqtəsində alır: . Onda kifayət qədər kiçik olan ixtiyari üçün buradan olduqda (1), olduqda (2). şərtində (1) və (2) bərabərliklərində limitə keçsək:



və münasibətlərinə əsasən olar. funksiyası dəqiq yuxarı sərhəddini parçanın daxili nöqtəsində aldıqda törəmənin sıfra bərabər olduğu nöqtəsinin varlığı eyni qayda ilə isbat olunur. Roll teoreminin həndəsi mənası belədir: funksiyasının parçasında qrafiki olan əyrinin uc nöqtələri olduqda şərti ödənilirsə, onda həmin əyri üzərində ən azı elə



bir C nöqtəsi var ki, bu nöqtədə əyriyə çəkilmiş şəkil 1toxunan vətərinə paraleldir(Şəkil 1).



A

B

C



b

y

Şəkil 1.

**2.Teorem (Laqranj teoremi).** parçasında kəsilməyən və intervalında diferensiallanan funksiyası üçün həmin intervalda yerləşən elə nöqtəsi var ki, bu nöqtədə



(3)



bərabərliyi doğrudur.

(3) bərabərliyinə Laqranj düsturu və ya sonlu artımlar düsturu deyilir.

**İsbatı.** parçasında təyin olunmuş (4) funksiyasına baxaq. funksiyası parçasında kəsilməyəndir, intervalında diferensiallanandır və parçanın uc nöqtələrində bərabər qiymətlər alır: . Onda Roll teoreminə görə onun törəməsi bir nöqtəsində sıfra bərabər olar: . Buradan (3) bərabərliyi alınır.



Nəticə. olarsa, (3) düsturundan alınır, yəni Roll teoremi Laqranj teoreminin nəticəsidir. Teoremin isbatından aydındır ki, Laqranj teoremi də Roll teoreminin nəticəsidir. Laqranj teoremi həndəsi olaraq göstərir ki, funksiyasının qrafiki olan əyri üzərində nöqtəsi var ki, bu nöqtədə əyriyə çəkilmiş toxunan AB vətərinə paraleldir (şəkil 2).

C

y

B

A

b

a



Şəkil 2 222.2

0



**3.Teorem (Koşi).** Tutaq ki, və funksiyaları parçasında kəsilməyən, intervalında diferensiallanan və həmin intervalın bütün nöqtələrində şərtini ödəyən funksiyalardır. Onda intervalında yerləşən elə nöqtəsi var ki, bu nöqtədə



(5)



bərabərliyi doğrudur.

**İsbatı.** Teoremin şərtindən aydındır ki, ,



çünki əks halda, yəni olduqda Roll teoreminə görə bir nöqtəsində olar ki, bu da şərtə ziddir. İndi aşağıdakı kimi köməkçi funksiya düzəldək:



(6).



funksiyası parçasında kəsilməyəndir. intervalında diferensiallanandır və parçanın uc nöqtələrində sıfra bərabərdir: . Onda Roll teoreminə görə onun törəməsi intervalının bir nöqtəsində sıfra bərabər olar: . Buradan (5) bərabərliyi alınar. Nəticə. olarsa, olar və (5) düsturu Loqranjın düsturuna çevrilər. Deməli Laqranj teoremi Koşi teoreminin xüsusi halıdır.



**§ 15.Qeyri-müəyyənliklərin açılışı. Lopital qaydası**

Fərz edək ki, və funksiyaları nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş və şərtini ödəyən funksiyalardır. Bu halda kəsri şərtində şəklini alır. Buna görə də həmin kəsrin limitinin hesablanmasına kəsrin limiti haqqındakı teoremi tətbiq etmək olmaz. Belə kəsrin (1) limitinin varlığı və qiyməti haqqında müxtəlif vəziyyətlər ola bilər. Ümumiyyətlə, bu zaman qeyri-müəyyən vəziyyət əmələ gəlir. Buna görə də belə hallarda (2) kəsrinə şəklində qeyri-müəyyənlik deyilir. Bundan başqa və kimi qeyri müəyyənliklər də vardır.



(2) kəsrinin (və ya başqa qeyri-müəyyənliklərin) limitinin tapılmasına şəklində (və ya başqa uyğun şəkildə) qeyri-müəyyənliyin açılışı deyilir. Diferensial hesabını tətbiq etməklə qeyri-müəyyənlikləri açmaq üçün ümumi metodu birinci dəfə Lopital verdiyindən ona qeyri-müəyyənliklərin açılışı üçün Lopital qaydası deyilir.



**Teorem 1.** ( şəklində qeyri-müəyyənliyin açılışı üçün Lopital qaydası). Tutaq ki, və funksiyaları nöqtəsinin müəyyən ətrafında ( nöqtəsi müstəsna olmaqla) təyin olunmuş, diferensiallanan, (3) və ( nöqtəsinin həmin ətrafında) şərtlərini ödəyən funksiyalardır. Əgər funksiyaların törəmələri nisbətinin (4) limiti varsa, onda funksiyaların özlərinin də nisbətinin limiti var və həmin ədədə bərabərdir:



(5).



**İsbatı.** Əgər və funksiyalarını nöqtəsində və kimi təyin etsək, onda həmin nöqtədə onlar kəsilməyən olar. Bu halda nöqtəsi nöqtəsinin teoremdə göstərilən ətrafında yerləşən ixtiyari nöqtə olduqda parçasında Koşi teoreminin bütün şərtləri ödənilir. Buna görə də intervalında yerləşən elə nöqtəsi var ki, (6) bərabərliyi doğrudur, olduğundan şərtində olar. Onda (6) bərabərliyindən tələb olunan (5) bərabərliyi alınır: .



**Qeyd 1**. nöqtəsi əvəzinə və simvollarından birini götürdükdə də Lopital qaydası doğrudur.



**Qeyd 2.** Əgər və funksiyalarının nöqtəsinin müəyyən ətrafında tərtibli törəmələri varsa, münasibətləri və törəmələri üçün teoremin şərtləri ödənilirsə, onda Lopital qaydasını dəfə ardıcıl tətbiq etməklə



(7)



bərabərliyini almaq olar (sağ tərəfdəki limit sonlu olduqda).

**Qeyd 3.** Teoremin tərsi doğru deyildir.

**Misal 1.** hesablamalı.



**Həlli.** Burada hər iki və funksiyası üçün



, .



nöqtəsinin ətrafında , törəmələri var və



.



Nəhayət törəmələrin nisbətinin limiti var.

.



Ona görə də verilmiş limitin hesablanmasına Lopital qaydasını tətbiq etmək olar:

. (8)



Lopital qaydası ilə nisbətin limitinin hesablanması (8) bərabərliyində olduğu kimi bir başa aparılır. Törəmələrin varlığı və onların nisbətinin limitinin olması hesablamanın gedişində müəyyən olunur.

**Teorem 2.** (şəklində qeyri-müəyyənliyin açılışı üçün Lopital qaydası). Tutaq ki, və funksiyaları nöqtəsinin müəyyən ətrafında ( nöqtəsi müstəsna olmaqla) təyin olunmuş, diferensiallanan və ( nöqtəsinin həmin ətrafında) şərtlərini ödəyən funksiyalardır: (8). Əgər (9) limiti varsa, onda funksiyaların özlərinində nisbətinin limiti var və həmin ədədə bərabərdir:



(10)



**Qeyd 4.** 1-ci teorem haqqındakı 1-3 qeydləri uyğun şəkildə bu teorem haqqında da doğrudur.

**Misal 2.**



.



**Misal 3.** . şəklində qeyri-müəyyənliklərin açılışı haqqında aşağıdakıları bilmək vacibdir.



1) şəklində qeyri-müəyyənlik və ya şəklində qeyri-müəyyənliklərə gətirilir və Lopital qaydası ilə hesablanır. Doğurdan da, və olarsa, onda və ya .



**Misal 4.**



.



2) şəklində qeyri-müəyyənlik və ya şəklində qeyri-müəyyənliklərə gətirilir və Lopital qaydası ilə hesablanır. Doğrudan da, və olarsa, onda: və yaxud .



**Misal 5.**



.



3) və şəklində qeyri-müəyyənliklər şəklində qeyri-müəyyənliyə gətirilir. Doğurdan da, və olarsa, onda: bərabərliyinin hər iki tərəfini loqarifmləməklə şəklinə gətirmək olar. Bunun limitini hesabladıqdan sonra bərabərliyindən ifadəsinin limitini tapmaq olar. və qeyri-müəyyənlikləri də həmin qayda ilə şəklində qeyri-müəyyənliyə gətirilir.



**Misal 6.** .



**Həlli.** götürək və bərabərliyin hər tərəfini loqarifmalayaq:



.



.



Buradan:

.



**§ 16.Teylor düsturu.**

Tutaq ki,

(1)



-dərəcəli çoxhədli və hər hansı həqiqi ədəddir. Bu çoxhədlini həmişə fərqinin qüvvətlərinə görə yazmaq olar, yəni elə ədədləri tapmaq olar ki,



(2)



bərabərliyi doğru olsun. (2) bərabərliyini ardıcıl olaraq dəfə diferensiallasaq və alınan bərabərliklərdə götürsək, onda əmsalları üçün düsturu alınar. Bu qiymətləri (2) düsturunda nəzərə alsaq, onda:



(3).



(3) bərabərliyinə çoxhədli üçün Teylor düsturu deyilir. olduqda



(4)



düsturunu alarıq. Bu düstura çoxhədli üçün Makloren düsturu deyilir. Tutaq ki, funksiyasının nöqtəsini öz daxilinə alan hər hansı intervalda () tərtibə qədər ( daxil olmaqla) bütün törəmələri var. Onda həmin funksiya üçün



(5)



çoxhədlisini düzəltmək olar. Bu çoxhədliyə funksiyasının -dərəcəli Teylor çoxhədlisi deyilir. funksiyası dərəcəli çoxhədli olmadıqda fərqi ümumiyyətlə, sıfırdan fərqli olar. Bu fərqi ilə işarə etsək: və ya



(6).



(6) düsturuna -in fərqinin qüvvətlərinə görə yazılmış Teylor düsturu, funksiyasına isə Teylor düsturunun qalıq həddi deyilir. Qalıq həddin müxtəlif formaları var. Bunlardan ifadəsi qalıq həddin Laqranj şəkli adlanır. Burada olduğunu nəzərə alsaq, Teylor düsturu (7).



Əgər götürsək funksiyası üçün Makloren düsturu alınar:



(8).



Bir sıra elementar funksiyaların Makloren düsturuna görə ayrılışını verək:

;



;



**.**



**§ 17. Funksiyaların törəmə vasitəsilə tədqiqi və qrafikinin qurulması**

**1. Funksiyaların monotonluq əlamətləri**

İxtiyari parçasında təyin olunmuş funksiyasının arqumentinin həmin parçada yerləşən və bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari iki və qiymətlərinə funksiyasının uyğun və qiymətləri bərabərsizliyini ödədikdə həmin funksiyaya parçasında **monoton artan** (və ya sadəcə **artan**) **funksiya** deyilir. Arqumentin parçasında yerləşən və bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari iki qiymətlərinə funksiyanın uyğun qiymətləri münasibətini ödədikdə funksiyasına parçasında **azalmayan funksiya** deyilir.



arqumentinin parçasında yerləşən və bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari iki **qiymətlərinə** funksiyasının uyğun qiymətləri bərabərsizliyini ödədikdə həmin funksiyaya parçasında **azalan** (və ya **monoton azalan**) **funksiya** deyilir. Arqumentin bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari iki qiymətinə funksiyanın uyğun qiymətləri münasibətini ödədikdə funksiyaya **artmayan funksiya** deyilir.



Verilmiş oblastda (parçada, intervalda və s.) monoton artan, azalmayan, azalan və artmayan funksiyalara birlikdə **monoton funksiyalar** deyilir.

**Misal 1.** funksiyası bütün ədəd oxu üzərində monoton artan funksiyadır. Arqumentin bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari iki və qiymətlərini götürək:



və kvadrat mötərizə içərisindəki ifadə müsbət olduğundan



və ya .



Deməli, verilmiş funksiya bütün ədəd oxu üzərində monoton artandır.

Qeyd etmək lazımdır ki, verilmiş funksiya təyin oblastının bir hissəsində artan, o biri hissəsində isə azalan ola bilər. Ola da bilər ki, verilmiş funksiya nə artan, nə də azalan olsun.

**Misal 2.** Dirixlenin



funksiyası təyin oblastında nə artan, nə də azalandır (monoton deyil).

Bir çox məsələlərin həllində verilmiş funksiyanın hər hansı oblastda monoton olub-olmamasını bu təriflər vasitəsilə yoxlamaq müəyyən çətinlik yaradır. Lakin törəmə anlayışından istifadə edərək funksiyanın verilmiş oblastda monoton olması şərtini asanlıqla müəyyən etmək olur.

**Teorem 1** (Funksiyanın sabit olması əlaməti). Tutaq ki, funksiyası parçasında kəsilməyən və intervalında diferensialanandır. funksiyasının parçasında sabit olması üçün onun törəməsinin intervalının bütün nöqtələrində sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.



**Teorem 2.** parçasında diferensiallanan funksiyasının həmin parçada azalmayan olması üçün onun parçasının bütün nöqtələrində törəməsinin mənfi olmaması () zəruri və kafidir.



**Şərtin zəruriliyi**. funksiyası azalmayan olduğundan parçasının istənilən nöqtəsi və üçün (9) bərabərsizliyi doğru olar . (9) bərabərsizliyi istənilən və nöqtəsi üçün də doğrudur. (9) bərabərsizliyində şərtində limitə keçsək istənilən nöqtəsində olar**.**



**Şərtin kafiliyi.** parçasının istənilən nöqtələrini götürüb parçasına Laqranj teoremini tətbiq edək: . Buradan və olduğundan yəni funksiyası parçasında azalmayandır. Kafiliyin isbatından aşağıdakı teoremin doğruluğu aydındır.



**Teorem 3.** Törəməsi parçasının bütün nöqtələrində müsbət olan funksiyası həmin parçada artandır.



Artmayan və azalan funksiyalar üçün də analoji təkliflər doğrudur.

**Teorem 4.** parçasında diferensiallanan funksiyasının həmin parçada artmayan olması üçün onun parçasının bütün nöqtələrində törəməsinin müsbət olmamsı () zəruri və kafidir.



parçasının bütün nöqtələrində törəməsi mənfi olan funksiyası həmin parçada azalandır.



**Misal 3.** funksiyasının törəməsi intervalında mənfi, () intervalında isə müsbətdir. Buna görə də funksiyası () intervalında azalan, () intervalında isə artandır.



**2. Funksiyanın ekstremumu**

**Tərif.** Əgər -in nöqtəsinin hər hansı ətrafında yerləşən bütün qiymətlərində bərabərsizliyi ödənilərsə onda deyirlər ki, funksiyasının nöqtəsində lokal maksimumu var. ədədinə funksiyanın lokal maksimum qiyməti deyilir.



Analoji olaraq -in nöqtəsinin hər hansı ətrafında yerləşən bütün qiymətlərində bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyirlər ki, funksiyasının nöqtəsində lokal minimumu var. ədədinə funksiyanın lokal minimum qiyməti deyilir.



Funksiyanın lokal maksimumu və lokal minimumuna birlikdə funksiyanın lokal ekstremumu deyilir. Funksiya lokal ekstremumu oblastın, daxili nöqtəsində aldığından ona daxili ekstremum da deyilir. funksiyasının parçasının ucundakı qiyməti həmin nöqtənin hər hansı sağ ətrafındakı bütün qiymətlərində olarsa, onda deyirlər ki, funksiyasının nöqtəsində sərhəd maksimumu (minimumu) var. Parçanın ucunda sərhəd maksimumu (və sərhəd minimumu) da eyni qayda ilə təyin olunur. Funksiyanın sərhəd maksimumu və sərhəd minimumu birlikdə funksiyanın sərhəd ekstremumu adlanır.



**Teorem (Lokal ekstremumun varlığı üçün zəruri şərt).** funksiyasının diferensiallanan olduğu nöqtəsində lokal ekstremumu varsa, onun törəməsi həmin nöqtədə sıfra bərabərdir: .



**İsbatı.** Tutaq ki, funksiyasının nöqtəsində ekstremumu (məsələn, lokal maksimumu) var. Onda ixtiyari (kiçik) artımı üçün: . Buradan olduqda, olduqda olar. Bu bərabərliklərdə şərtində limitə keçsək, eyi zamanda münasibətləri alınır. Buradan da . Funksiyanın törəməsinin sıfra bərabər olduğu nöqtələrə həmin funksiyanın stasionar nöqtələri deyilir. Funksiyanın lokal ekstremumu törəməsi olmadığı ( olan və -in heç olmadığı) nöqtələrdə də ola bilər. Məsələn və funksiyalarının hər ikisinin nöqtəsində törəməsi yoxdur, lakin həmin nöqtəsində onların lokal minimumu var. Kəsilməyən funksiya törəməsinin sıfra çevrildiyi və törəməsi, olmadığı nöqtələrə həmin funksiyanın böhran nöqtələri deyilir. Yuxarıda deyilənlərə əsasən funksiyanın lokal ekstremumun varlığı üçün şərtin zəruriliyini aşağıdakı kimi ümumi şəkildə söyləmək olar.



**Şərtin zəruriliyi.** Funksiyanın lokal ekstremum qiymət aldığı hər bir nöqtə həmin funksiyanın böhran nöqtəsidir.

**Teorem (Ekstremumun varlığı üçün kafi şərt).** Tutaq ki, funksiyası böhran nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməyən və həmin ətrafda nöqtəsi müstəsna olmaqla, diferensiallanan funksiyadır. Əgər soldan sağa nöqtəsindən keçdikdə funksiyanın törəməsi öz işarəsini dəyişirsə, onda həmin nöqtədə funksiyanın lokal ekstremumu var, soldan sağa nöqtəsindən keçdikdə funksiyanın törəməsi öz işarəsini dəyişmədikdə isə həmin nöqtədə funksiyanın lokal ekstremumu yoxdur.



Bu halda funksiyanın törəməsi nöqtəsindən solda müsbət, sağda mənfi olduqda həmin nöqtədə funksiyanın lokal maksimumu var, funksiyanın törəməsi nöqtəsindən solda mənfi , sağda müsbət olduqda isə həmin nöqtədə funksiyanın lokal minmumu var.



Funksiyanın lokal ekstremumun varlığını ikitərtibli törəmə vasitəsilə təyin etmək bəzən daha əlverişli olur.

**Teorem.** Əgər funksiyasının stasionar (yəni olan) nöqtəsində ikitərtibli törəməsi varsa, onda olduqda funksiyanın nöqtəsində lokal maksimumu, olduqda isə həmin nöqtədə lokal minimumu var.



**İsbatı.** İkitərtibli törəmənin tərifinə görə olduğundan ixtiyari ədədi üçün elə var ki, in bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində (1) münasibəti ödənilir. olduqda müsbət ədədini elə seçmək (məsələn olar ki, bərabərsizliyi ödənilsin. Onda (1) bərabərsizliyinin sağ tərəfindən alaraq ki, in bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində (2). olduqda və olduqda olduğundan (2) bərabərsizliyinin ödənimlməsi üçün olduqda olduqda isə olmalıdır. Deməli, funksiyanın törəməsi nöqtəsində öz işarəsini müsbətdən mənfiyə dəyişir, yəni həmin nöqtədə funksiyanın lokal maksimumu var. olduqda isə (1) münasibətinin sol bərabərsizliyinə əsasən göstərmək olar ki, olduqda , olduqda isə olmalıdır, yəni törəməsi öz işarəsini nöqtəsində mənfidən müsbətə dəyişir. Bu da funksiyanın nöqtəsində lokal minimumu olduğunu göstərir.



**Qeyd**. Verilmiş funksiyasının böhran nöqtəsində birinci və ikinci tərtib törəmələri sıfra bərabər olduqda, həmin nöqtədə lokal ekstremumun varlığını yüksək tərtibli törəmələr vasitəsilə müəyyən etmək olar.



**3. Funksiyanın parçada ən böyük və ən kiçik qiymətləri**

Tutaq ki, funksiyası parçasında təyin olunmuş kəsilməyən funksiyadır. Bu funksiyanın parçanın daxili nöqtələrində bir neçə minimumu və maksimumu ola bilər. Lakin ekstremum, nöqtələrin yaxın ətrafına aid olduğu üçün minimumların bəzisi maksimumların bir və ya bir neçəsindən böyük ola bilər. Buna görə də bir çox məsələlərin həlli üçün lokal ekstremumdan başqa funksiyanın bütün parçasına nəzərən maksimumu və minimumu, yəni bütün parçaya nəzərən ekstremumuna baxmaq lazım gəlir. Belə ekstremuma **qlobal ekstremum** və ya **mütləq ekstremum** deyilir.



funksiyası parçasında kəsilməyən olduqda, parçada kəsilməyən funksiyanın xassələrinə görə, o parçada özünün ən kiçik və ən böyük qiymətlərini alar. funksiyasının parçasındakı ən böyük qiyməti onun həmin **parçada maksimumu** və ya **maksimal qiyməti**, ən kiçik qiyməti isə həmin **parçada minimumu** və ya **minimal qiyməti** adlanır. Funksiyanın parçada maksimal və minimal qiymətlərinə birlikdə onun **qlobal ekstremumu** və ya parçada **ekstremal qiymətləri** deyilir.



Funksiya parçasındakı maksimal, yaxud minimal qiymətlərini ya parçanın daxili nöqtəsində, ya da parçanın üç nöqtəsinin birində alır.



Beləliklə, funksiyanın parçada ekstremal qiymətlərini tapmaq üçün aşağıdakı qayda alınır: funksiyasının parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapmaq üçün onun parça daxilindəki bütün maksimum və minimum qiymətlərini və parçanın üç nöqtəsindəki qiymətlərini tapıb müqaisə etmək lazımdır. Bu qiymətlərdən ən böyüyü funksiyanın parçasındakı ən böyük qiyməti, ən kiçiyi isə funksiyanın parçasındakı ən kiçik qiyməti olur.



funksiyasının parçasındakı maksimal qiyməti və ya , minimal qiyməti isə və ya -lə işarə olunur.



**Misal 8.** funksiyasının parçasında ən kiçik və ən böyük qiymətlərini tapmalı.



**Həlli.** Funksiyanın



törəməsi həmin parçanın nöqtəsində sıfra çevrilir. Beləliklə, funksiyanın



qiymətlərini müqayisə edərək

və



olduğunu taparıq.

**4.Əyrinin qabarıq və çöküklüyü.**

Fərz edək ki, funksiyası intervalında təyin olunmuş, kəsilməyən və diferensiallanan funksiyadır. Onda funksiyasının qrafiki olan əyrinin ixtiyari nöqtəsində toxunanı var. Bu əyrinin absisi,





Şəkil 1

Şəkil 2

olan nöqtəsində çəkilən toxunanın tənliyi (1)



olacaqdır.

**Tərif.** Əgər -in nöqtəsinin müəyyən ətrafında yerləşən bütün qiymətlərində bərabərsizliyi ödənilərsə, onda funksiyasının qrafikinə nöqtəsində qabarıq və ya qabarıqlığı aşağıya yönəlmiş (çökük və ya qabarıqlığı yuxarıya yönəlmiş) əyri deyilir.



Məsələn 1-ci şəkildə əyri nöqtəsində qabarıqdır, 2-ci şəkildə isə əyri nöqtəsində çökükdür.



intervalının hər bir nöqtəsində qabarıq (çökük) olan əyriyə həmin intervalda qabarıq (çökük) əyri deyilir.



**Teorem 1.** Əgər funksiyanın nöqtəsində sıfırdan fərqli ikitərtibli kəsilməz törəməsi varsa, onda olduqda əyrisi nöqtəsində qabarıq, olduqda isə həmin nöqtədə çökük olar.



**İsbatı**. funksiyasını fərqinin qüvvətlərinə görə



(2).



Teylor düsturu şəklində göstərək. (2) və (1) bərabərliklərini tərəf-tərəfə çıxsaq: (3) olar. Şərtə görə törəməsi nöqtəsində kəsilməyən və olduğundan nöqtəsinin elə ətrafı var ki, -in bu ətrafdakı bütün qiymətlərində ilə eyni işarəli olar. Onda olduqda in həmin ətrafdakı bütün qiymətlərində və buna görə də (3) bərabərliyinə əsasən olar, yəni əyrisi nöqtəsində qabarıqdır.



olduqda isə in göstərilən ətrafdakı bütün qiymətlərində olar. Yenə də (3) bərabərliyinə görə: . Buradan əyrisinin nöqtəsində çökük olması aydındır.



**Tərif.** Kəsilməyən əyrinin qabarıq hissəsini çökük hissəsindən ayıran nöqtəyə dönmə (əyilmə) nöqtəsi deyilir.

**Teorem 2.** (Dönmə nöqtəsinin varlığı üçün şərtin zəruriliyi) funksiyasının nöqtəsində ikinci tərtibli kəsilməz törəməsi varsa və nöqtəsi onun qrafikinin dönmə nöqtəsidirsə, onda .



Kəsilməyən funksiyanın ikinci törəməsinin sıfra çevrildiyi və olmadığı nöqtələrə həmin funksiyanın ikinci törəməsinə nəzərən böhran nöqtələri deyilir.

**Teorem 3**. (Dönmə nöqtəsinin varlığı üçün kafi şərt). Tutaq ki, nöqtəsinin müəyyən ətrafında ( nöqtəsi müstəsna olmaqla) funksiyasının sıfra çevrilməyən ikitərtibli törəmsi vardır. Əgər soldan sağa nöqtəsindən keçdikdə funksiyanın törəməsi öz işarəsini, dəyişərsə, onda nöqtəsi əyrisinin dönmə nöqtəsidir, soldan sağa nöqtəsindən keçdikdə törəməsi öz işarəsini dəyişmirsə, onda həmin nöqtə əyrisinin dönmə nöqtəsi deyildir.



**5. Əyrinin asimptotları**

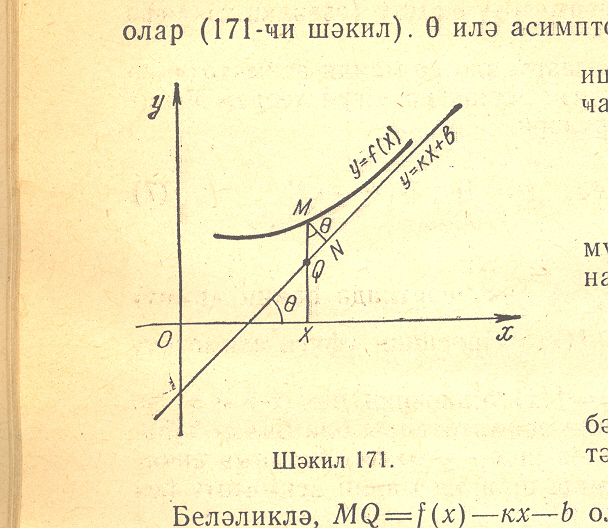
**Tərif.**əyrisi üzərindəki dəyişən nöqtəsi sonsuluğa gedərkən nöqtəsindən verilmiş düz xəttinə qədər olan məsafəsi sıfra yaxınlaşarsa, onda düz xəttinə həmin əyrinin asimptotu deyilir.



**Tərif.** şərtlərindən heç olmasa biri ödənilirsə, onda düz xəttinə funksiyasının qrafikinin şaquli asimptotu deyilir.



Tutaq ki, funksiyası arqumentin istənilən böyük müsbət qiymətlərində təyin olunmuşdur və düz xətti əyrisinin maili asimptotudur. Bu halda əyrisi üzərindəki dəyişən nöqtəsinin sonsuzluğa getməsi şərtinə ekvivalent olduğu üçün asimptotun tərifinə görə



Şəkil 3



(4)



olar (Şəkil 3). ilə asimptotun meyl bucağını işarə etsək, onda üçbucağından



və ya (5)



münasibətini alarıq. Bu münasibətə əsasən (4)-dən bərabərliyi alınır. Beləliklə, olduğundan aşağıdakı təklifi isbat etmiş oluruq: düz xətti şərtində əyrisinin maili asipmtotu olması üçün və ya



(6)



şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Bu təklifin köməyilə aşağıdakı teoremi isbat etmək olar.

**Teorem 4.** düz xətinin şərtində əyrisinin maili asimptotu olması üçün



və (7)



limitlərinin ikisinin də varlığı zəruri və kafi şərtdir.

**İsbatı. Zəruriliyin isbatı.** Fərz edək ki, funksiyasının qrafiki şərtində maili asimptotuna malikdir.İsbat edək ki, (7) limitlərinin hər ikisi vardır. Doğrudan da, -dən alırıq:



**Kafiliyin isbatı.** İndi isə fərz edək ki, (7) limitləri vardır. İsbat edək ki, onda funksiyasının qrafiki şərtində maili asimptotuna malikdir. (7) limitlərinin varlığına əsasən *b* və *k* ədədləri məlumdur. fərqini ilə işarə edək:



. (8)



(7)-dəki ikinci limitə əsasən (8)-dən alırıq



(7)-dən -i tapsaq, (6)-i alarıq. Həm də ödənildiyi üçün alırıq ki, funksiyasının qrafiki maili asimptotuna malikdir.Teorem isbat olundu.



**6. Funksiyanın qrafikinin qurulma sxemi**

Funksiyaların qrafikini qurmaq üçün:

1. funksiyanın təyin oblastı tapılır;
2. funksiyanın kəsilməz olduğu oblast və kəsilmə nöqtələri tapılır;
3. funksiyanın tək, cüt və periodik (dövri) olması yoxlanılır. Funksiya qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri tapılır;
4. funksiyanın artma və azalma intervalları tapılır;
5. funksiyanın ekstremumu və ekstremum qiymətləri tapılır;
6. funksiya qrafikinin qabarıq və çökük olduğu intervallar və dönmə nöqtələri təyin edilir;
7. funksiya qrafikinin asimptotları tapılır.

Aparılmış araşdırmaya əsasən funksiyanın qrafiki qurulur.

**Misal 14.** funksiyasının qrafikini qurmalı.



**Həlli.** Verilmiş funksiyanı yuxarıda göstərilən sxem üzrə tədqiq edək:

1. Funksiya nöqtəsindən başqa hər yerdə təyin olunmuşdur.



1. Funksiya bütün təyin oblastında, yəni və intervallarında kəsilməyəndir.



1. Verilmiş funksiya təkdir. Onun qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşir. Ona görə də funksiyanı aralığında araşdırmaq kifayətdir. Funksiya koordinat oxlarını ancaq koordinat başlanğıcında kəsir.



1. Funksiyanın artma və azalma intervallarını tapmaq üçün birinci törəməni hesablayırıq:

.

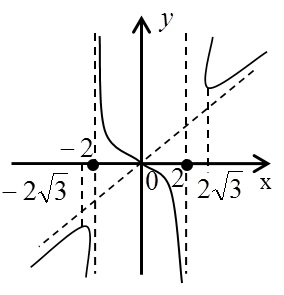


Buradan aydındır ki, aralığının nöqtələrində birinci tərtib törəmə sıfra, nöqtəsində isə sonsuzluğa çevrilir. Ona görə də funksiya və intervallarında azalan, intervalında isə artandır.



5) , nöqtələri funksiyanın böhran nöqtələridir. nöqtələrində ikinci törəmə



 öz işarəsini saxladıgından həmin nöqtələrdə funksiya ekstremum qiymət almır, nöqtəsində olduğundan həmin nöqtədə funksiya minimum qiymət alır.



6) olduqda olur. olduqda , olduqda isə olduğundan nöqtəsi dönmə nöqtəsinin absisi olur. Deməli, əyri koordinat başlanğıcında dönür.



7) Əyrinin şaquli və maili asimptotlarını tapaq:

olduğundan düz xətti əyrinin şaquli asimptotu,



olduğundan düz xətti əyrinin maili asimptotu olar. Alınan məlumatlar funksiyanın qrafikini qurmağa imkan verir.



**ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN DİFERENSİAL HESABI**

**§18 Çoxdəyişənli funksiya, onun limiti və kəsilməzliyi**

1. **Əsas təriflər və anlayışlar**

Müstəvi nöqtələr çoxluğunu və ,…, müstəvi nöqtələr ardıcıllığını isə ilə işarə edək.



**Tərif.** Koordinatları



münasibətini ödəyən nöqtələr çoxluğu nöqtəsinin ətrafı adlanır.



Aydındır ki, nöqtəsinin ətrafı, mərkəzi nöqtəsində və radiusu -ya bərabər olan dairə daxilində yerləşən bütün nöqtələrdən ibarətdir.



**Tərif.** Tutaq ki, ixtiyari ədədinə qarşı elə natural ədədi var ki, olduqda münasibəti ödənilir. Onda müstəvi nöqtələri nöqtəsinə yığılan nöqtələr ardıcıllığı, nöqtəsi isə **ardıcıllığının limiti** adlanır və və ya kimi işarə olunur.



Müstəvi nöqtələri ardıcıllığının yığılması anlayışı, ədədi ardıcıllığın yığılması anlayışının ümumiləşməsidir.

**Tərif.** Müstəvi nöqtələri çoxluğunun ixtiyari iki nöqtəsini bu çoxluğun nöqtələrindən ibarət olan kəsilməz əyri ilə birləşdirmək mümkün olduqda, həmin çoxluğa **rabitəli çoxluq** deyilir.

Dairə rabitəli, ortaq nöqtəsi olmayan iki dairə isə rabitəsiz çoxluğa misal ola bilər.

**Tərif**. nöqtəsinin çoxluğuna daxil olan ətrafı varsa, onda nöqtəsinə çoxluğunun **daxili nöqtəsi** deyilir.



**Tərif.** Yalnız daxili nöqtələrdən ibarət olan çoxluğa açıq çoxluq deyilir.

**Tərif.** Rabitəli açıq çoxluğa **oblast** deyilir.

**Tərif.** nöqtəsinin istənilən ətrafı həm oblasta daxil olan və həm də daxil olmayan nöqtələr saxlayırsa, onda oblastın sərhəd nöqtəsi adlanır. Oblastın sərhəd nöqtələri çoxdluğuna **oblastın sərhədi** deyilir.



**Tərif.** Oblast və onun bütün sərhəd nöqtələrindən ibarət olan çoxluğa qapalı oblast deyilir.

**Tərif.** Müstəvi nöqtələri çoxluğunun bütün nöqtələri hər hansı sonlu radiuslu dairə daxilində yerləşirsə, çoxluq məhdud, əks halda qeyri-məhdud adlanır.

**Misal 1**. Üçbucağın, dairənin və ellipsin daxili nöqtələri çoxluğu məhdud, düz xəttin nöqtələri çoxluğu isə qeyri-məhdud çoxluqdur.

**Misal 2.** Dairənin daxili nöqtələrindən ibarət olan çoxluq oblasta misal ola bilər. Bu oblastın sərhəd nöqtələri dairənin çevrəsini təşkil edir.

**Misal 3**. Koordinatları münasi­bət­lərini ödəyən nöqtələr çoxluğunun təşkil etdiyi qapalı oblast, təpə nöqtələri , , və nöqtə­lərində olan düzbucaqlıdır.



**2. Çoxdəyişənli funksiya anlayışı**

Riyazi analiz kursunda birdəyişənli funksiyaları, bu funksiyaların limitini, kəsilməzliyi və diferensialını öyrən­mişik. Lakin bir çox məsələlərin həllində elə dəyişən­lərə rast gəlmək olur ki, onların qiyməti iki və daha çox sərbəst dəyişəndən asılı olur. Məsələn, düzbucaqlının sahəsi, onun eni ilə uzunluğu hasilinə bərabərdir.



düzbucaqlının eni, uzunluğu, -isə sahəsidir. Deməli, düzbucaqlının sahəsi iki dəyişəndən asılıdır. Kəsik konusun həcmi



düsturu ilə hesablanır. Burada kəsik konusun hündürlüyü, alt oturacağın radiusu, isə üst oturacağın radiusudur. Kəsik konusun həcmi üç dəyişəndən asılıdır.



Belə məsələlərin təbii ümumiləşməsi olan çoxdəyişənli funksiyaları və onların xassələrini qısa şəkildə şərh edək.

**Tərif.** dəyişənlərinin hər hansı çox­luğundan götürülmüş hər bir nöqtəsinə müəy­yən qayda və qanunla ədədini qarşı qoyan uyğunluğuna dəyişənli (çoxdəyişənli) funksiya deyilir və kimi işarə olunur. Burada –ə sərbəst dəyişənlər və yaxud arqumentlər, -ə isə asılı dəyişən, yaxud funksiya deyilir.



olduqda əvəzinə çox vaxt (iki­əyişənli funksiya), olduqda isə əvəzinə (üçdəyişənli funksiya) yazılır.

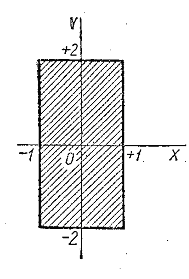


Sadəlik üçün ikidəyişənli funksiyaları öyrənək.

**Tərif.** oblastının hər bir ədədləri cütlüyünə müəyyən qaydası ilə bir və ya bir neçə həqiqi ədədi qarşı qoyularsa, onda deyirlər ki, çoxluğunda funksiyası təyin olunmuşdur.



Burada sərbəst dəyişən və ya arqument, asılı dəyişən və ya funksiyadır. nöqtələr çoxluğu funksiyanın təyin oblastı , -in aldığı qiymətlər çoxluğu isə funksiyanın dəyişmə oblastı və ya qiymətlər çoxluğu ad­lanır. İkidəyişənli funksiyalar , , və s. kimi işarə edilir. Birdəyişənli funk­siyalar kimi, ikidəyişənli funk­siyalar da analitik üsulla, cədvəl şək­lində, qrafik üsulla və s. verilə bilər. Funksiya ana­litik üsulla verildikdə onun təyin oblastı bəzən göstərilmir, bunu funksiyanın analitik ifadəsinə əsasən tapmaq olur.



Б

Ъ

Д

А

-1

-1

й



**Misal 4.** funksiyasının təyin oblastını tap­malı.



**Həlli**: Verilmiş funksiya iki dəyişəndən asılıdır və onun təyin olunması üçün



münasibəti ödəniməlidir. Buradan,



0

*a*

y

*x*



olar. Deməli, verilmiş funksiyanın təyin oblastı ABCD düz­bucaq­lı­sının nöqtələri çoxluğudur.

**Misal 5.** funk­siyasının təyin oblastını tap­malı.



**Həlli:** z funksiyası ,



yəni şərtində həqiqi qiymətlər alır.



Deməli, verilən funksiyanın tə­yin oblastı mərkəzi koordinant başlanğıcında, radiusu isə a olan dairədir.

**Misal 6**. funk­siyasının təyin oblastını tap­malı.

y

x

0



**Həlli:** Aydındır ki, funk­siya şərtində həqiqi qiy­mətlər alır. Bu isə o deməkdir ki, verilmiş fun­ksiyanın təyin ob­lastı düz xətti müstəsna olmaqla ondan yuxarıda yerlə­şən yarım­­müs­təvinin nöqtələri çoxluğudur.



funksiyasının nöqtəsində aldığı qiymətə ikidəyişənli funksiyanın xüsusi qiyməti deyilir və



və ya

(*х, й, з*)

(*х, й*)

Д

й

з

*х*

*0*



kimi işarə olunur.

funksiyasının , ,… nöq­tələrindəki ,, və s. qiymətləri fəzada , və s. nöqtələrini təşkil edir. Bu nöqtələr isə fəzada bir səth təyin edir.



**Tərif.** oblastında tə­yin edilmiş ikidəyişənli funksiyasının qra­fiki Oxyz fəza koor­dinat sistemində nöqtə­lər çoxluğunun təyin etdiyi səthə deyilir.

у

z

*x*

1

1

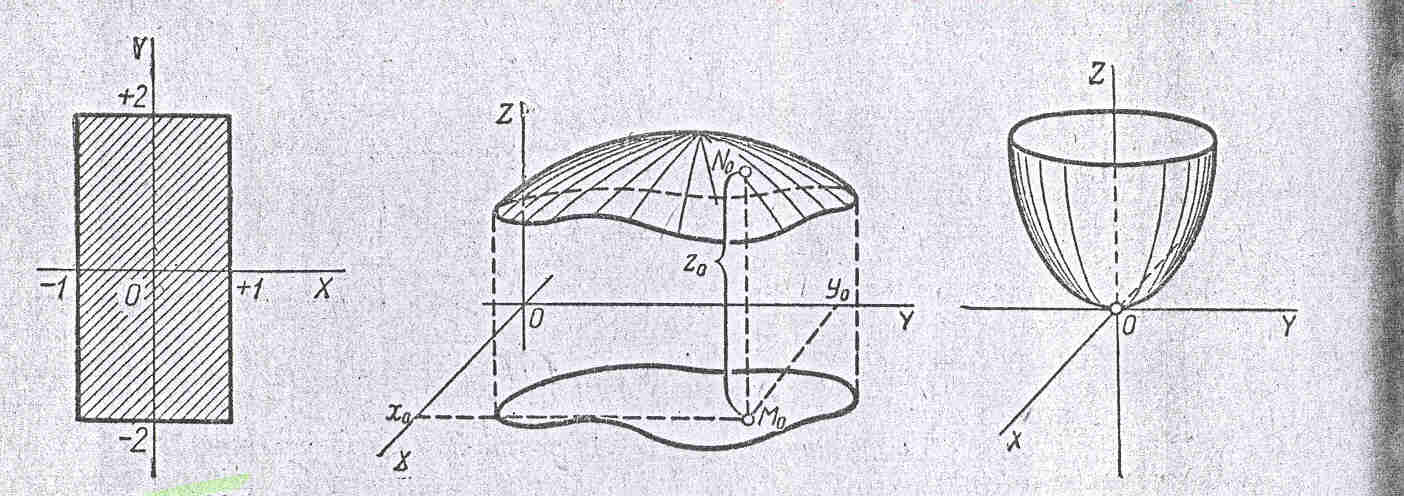
1

0



İkidəyişənli funksiyasnın qrafikini hən­dəsi olaraq göstərmək olar. Bu məqsədlə həmin funk­siyanın təyin oblastını D ilə işarə edək. Onda onun qrafiki nöqtələr çoxluğu olar. Bu çoxluğun hər bir nöqtəsinin applikatı *f* funksiyasının nöqtəsində qiymətidir. çoxluğunu təyin etmək üçün oblastının hər bir (, y) nöqtəsində Oxy müstəvisinə qaldırılmış perpendikulyar üzərində ədədinə bərabər parça ayırmaq lazımdır. Alınan nöqtələr çoxluğu Q çoxluğunu təşkil edir və onların həndəsi yeri üçölçülü fəzada səth olur. Bu səthin tənliyi . Deməli, ikidəyişənli funksiyasının qrafiki səthdir və bu səthin (oxy) müstəvisinə proyeksiyası həmin funksiyanın təyin oblastıdır.



**Misal 7.** ikidə­işənli funksiyasının həndəsi ob­razı (1,0,0), (0,1,0) və (0,0,1) nöqtə­lərindən keçən müstəvini ifadə edir.



**Misal 8**. funksi­yasının qrafiki elliptik parabo­loiddir.



İkidəyişənli funksiyanın qra­fiki olan səth onun dəyişmə xa­rak­teri haqqında müəy­yən təsəvvür yaradır. İkidəyişənli funksiyanı həndəsi göstərmək üçün səviyyə xət­lərindən də istifadə olunur. funksiyasının eyni sabit «» qiyməti aldığı nöqtələri çoxluğuna həmin funksiyanın **səviyyə xətti** deyilir. Buradan aydındır ki, səviyyə xəttinin tənliyi olar.



əvəzinə götürməklə funksiyası üçün müxtəlif səviyyə xət­ləri alarıq. Bu sə­viyyə xətlərini, səthini müs­tə­visinə paralel olan ,, müs­təvi­lərilə kəsərək, kə­siş­mə xətlərini, müs­­­tə­visinə proyek­siya­la­maq­la da almaq olar.



Səviyyə xətlərinin sıxlaşdığı yerdə funksiyası sürətlə artır və ya aza­lır. Səviyyə xətləri sey­rək yerləşdiyi yerdə isə funk­siya yavaş də­yişir. Funksiyanın mak­­si­mum və mini­mum qiy­mətlər aldığı nöqtə­lərdə səviyyə xətləri nöqtəyə çevrilir.

y

z

x



Qeyd edək ki, funksiyası üçün təyin oblastı fəza oblastı olur, lakin belə funksiyanın qrafikini qurmaq mümkün deyil.



Arqumentlərin sayı olan funksiyaların isə nə təyin oblastını, nə də qrafikini qurmaq mümkün deyil.



Tutaq ki, funksiyası oblastında təyin olunmuşdur. bu oblastın hər hansı nöqtəsidir və dəyişənləri uyğun olaraq elə və artımları alır ki, nöqtəsi yenə də həmin oblasta daxil olur. Onda funksiyası



artımını alır. Bu ifadəyə funksiyasının tam artımı deyilir.



ifadəsinə üçdəyişənli funksiyasının tam artımı deyilir.



**3. Çoxdəyişənli funksiyanın limiti**

Tutaq ki, nöqtəsinin müəyyən ətrafında ( müstəsna ola bilər) funksiyası təyin olunmuşdur.



**Tərif.** nöqtəsinə yığılan ixtiyari nöqtələr ardıcllığı üçün funksiyasının uyğunqiymətləri ardıcıllığı eyni bir ədədinə yığılarsa, onda ədədinə funksiyasının nöqtəsində **limiti** deyilir və



və ya



şəklində yazılır.

İkidəyişənli funksiyanın limitinin tərifini «ε-δ» dilində aşağıdakı kimi söyləmək olar.

**Tərif**. Tutaq ki, sonlu ədədi, nöqtəsi ixtiyarı ε>0 üçün elə δ>0 ədədi var ki, bəra­bərsizliyini ödəyən bütün nöqtələri üçün münasibəti ödənilir. Onda A ədədinə şərtində *f*(,y) **funksiyasının limiti** deyilir.



Tutaq ki, funksiyası çoxluğunda təyin olunmuşdur və nöqtəsi bu çoxluğun limit nöqtəsidir. nöqtəsi çoxluğuna daxil ola da bilər, olmaya da bilər.



**Tərif.** Tutaq ki, sonlu ədədi, nöqtəsi və istənilən ε>0 ədədi üçün elə δ>0 ədədi var ki, çoxluğunun



bərabərsizliyini ödəyən bütün nöqtə­lərində



münasibəti ödənilir. Onda A ədədinə şərtində çoxluğu üzrə **funksiyasının limiti** deyilir. ədədinin çoxluğu üzrə şərtində f funksiyasının limiti olmasını



və ya



kimi yazırlar.

Aydındır ki, funksiyasının nöqtəsində sonlu limiti varsa, onda onun həmin nöqtədə istənilən əyri və istənilən istiqamət üzrə limiti var və bu limitlərin hamısı funksiyanın nöqtəsindəki limiti ilə üst-üstə düşür. Deməli, verilmiş funksiyanın heç olmasa iki istiqamət və əyri üzrə nöqtəsində limiti müxtəlifdirsə, onda həmin funksiyanın nöqtəsində limiti yoxdur.



**Misal 9.** funksiyasının nöqtə­sində limitini tapmalı.



**Həlli:** funksiyası bütün müstəvidə təyin olunmuşdur. Müstəvi üzərində nöqtəsinə yığılan ixtiyari nöqtələr ardıcıllığı götürək. Onda



Deməli,



**Misal 10**. funksiyasının limitini tap­ma­lı.



**Həlli:** Bu funksiya şərtini ödəyən nöqtələrdən başqa, müstəvinin qalan nöqtələrində təyin olunmuşdur. Göstərək ki, bu funksiyanın nöqtəsində limiti yoxdur. nöqtəsinə yığılan və nöqtələr ardıcıllığı götürək. Onda



Beləliklə, nöqtəsinə yığılan iki müxtəlif nöqtələr ardıcıllığı üçün funksiyanın qiymətləri ardıcıllığının müxtəlif limiti var. Deməli, verilmiş funksiyanın nöqtəsində limiti yoxdur.



**Misal 11**. hesablamalı.



**Həlli:** Fərz edək ki, nöqtəsi nöqtəsinə düz xətti boyunca yaxınlaşır. Bu düz xətt üzərində funksiyasının qiyməti sabitdir, çünki olduğundan



olar. Onda



k-nin müxtəlif qiymətlərində limit də müxtəlif olur. Deməli, verilmiş funksiyanın limiti yoxdur.

**Misal 12**. tapmalı.



**Həlli:**



İkidəyişənli funksiyanın limitinin tərifindən istifadə edərək, birdəyişənli funksiyaların limiti haqqında olan limit teoremlərini ikidəyişənli funksiyalar üçün də söyləmək olar.

**Teorem.** Fərz edək ki, və funksiyaları eyni bir oblastında təyin olunmuşdur və bu funksiyaların nöqtəsində uyğun sonlu və limitləri var. Onda



münasibətləri doğrudur.

Birdəyişənli funksiyalarda olduğu kimi, ikidəyişənli funksiyaların da limitini hesabladıqda sonsuz kiçilən funksiya və onların müqayisəsindən geniş istifadə olunur.

**Tərif.** nöqtəsində limiti sıfra bərabər, yəni



münasibətini ödəyən funksiyasına **sonsuz kiçilən funksiya** deyilir.



İkidəyişənli funksiyalar üçün



münasibətləri birdəyişənli sonsuz kiçilən funksiyalarda olduğu kimi təyin olunur.

Qeyd edək ki, ikidəyişənli funksiyanın ikiqat limitindən əlavə, onun təkrar limiti anlayışı da verilir.



limitləri ikidəyişənli funksiyaların təkrar limitləri adlanır.

İkidəyişənli funksiyasının ikiqat və təkrar limitlərinin varlığı və bərabərliyi haqqında müxtəlif hallar ola bilər.



**Misal 13.**



funksiyasının nöqtəsində limiti (ikiqat limiti) yoxdur, lakin nöqtədə təkrar limiti var:



**Misal 14.**



funksiyasının nöqtəsində ikiqat və təkrar limiti var, lakin təkrar limiti yoxdur.



Buradan aydındır ki, ikidəyişənli funksiyanın ikiqat və təkrar limitlərinin birinin varlığından, o biri ikisinin varlığı çıxmır. Bununla belə, həmin limitlərin varlığı və bərabər olması haqqında aşağıdakı teoremi qeyd etmək olar.

**Teorem.** nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş funksiyasının həmin nöqtədə ikiqat limiti və qiymətlərində adi



limiti varsa, onda onun təkrar limiti də var və ikiqat limitə bərabərdir.



**Nəticə**. nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş funksiyasının həmin nöqtədə ikiqat limiti və hər iki təkrar limiti varsa, onda onların üçü də bir-birinə bərabər olar.



Yadda saxlamaq lazımdır ki, ikidəyişənli funksiyasının təkrar limitlərinin varlığından onların bərabərliyi çıxmır.



Doğrudan da,



bərabərliyi ilə təyin olunmuş funksiyasının nöqtəsində təkrar limitlərinin ikisi də var:



lakin onlar bir-birinə bərabər deyildir.

Buradan aydındır ki, təkrar limitdə limitlərin yerini həmişə dəyişmək olmaz.

**4. Çoxdəyişənli funksiyanın kəsilməzliyi**

**Tərif.** İkidəyişənli funksiyası üçün nöqtəsində



münasibəti ödənilirsə, onda ona nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir.



Kəsilməzliyin «» dilində aşağıdakı ekvivalent tərifini də vermək olar.



**Tərif.** Tutaq ki, ixtiyari ədədinə qarşı elə var ki, şərtini ödəyən nöqtələri üçün



münasibəti ödənilir. Onda funksiyasına nöqtəsində **kəsilməyən funksiya** deyilir.



Kəsilməzlik şərtini ödəməyən nöqtə funksiyanın kəsilmə nöqtəsi adlanır.

Tərifdən alınır ki, aşağıdakı hallarda verilmiş ikidəyişənli funksiya nöqtəsində kəsilən ola bilər.



1. funksiyası nöqtəsində təyin olunmadıqda.



2. funksiyasının nöqtəsində limiti olmadıqda.



3. funksiyasının limiti nöqtəsində funksiyanın xüsusi qiymətinə bərabər olmadıqda



Məsələn,



funksiyasında

lakin və olduğundan nöqtəsi onun kəsilmə nöqtəsidir



Kəsilməzliyin tərifini funksiyanın tam artımı vasitəsilə təyin etmək bir çox hallarda əlverişli olur. İkidəyişənli funksi­yanın tam artımını



şəklində yazmaq olar.



şərti ödəndikdə funksiyasına nöqtəsində **kəsilməyən funksiya** deyilir.



Oblastın bütün nöqtələrində kəsilməyən funksiya həmin **oblastda kəsilməyən funksiya**  deyilir.

**Misal 15.** funksiyası müstəvinin ixtiyari nöqtəsində kəsilməzdir. Doğrudan da



Qapalı məhdud oblastda kəsilməyən ikidəyişənli funk­siya aşağıdakı xassələrə malikdir:

10. Qapalı məhdud oblastda kəsilməyən funksiyası bu oblastda məhduddur.



20. Qapalı məhdud oblastda kəsilməyən funksiyası bu oblastda özünün dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədlərini alır.



30. Oblastda kəsilməyən funksiyası özünün və qiymətləri arasındakı bütün qiymətləri alır, yəni və ya şərtini ödəyən ədədi üçün oblasta daxil olan elə nöqtəsi var ki, olur.



**Qeyd.** Çoxdəyişənli funksiyaların limitinin və kəsilməzliyinin tərifləri ikidəyişənli funksiyalara oxşar şəkildə verilir.

**§19. Çoxdəyişənli funksiyanın törəməsi və diferensialı**

**1. Birinci tərtib xüsusi törəmələr**

Tutaq ki, ikidəyişənli funksiyası ob­lastında təyin olunmuşdur və bu oblastın hər hansı nöqtəsidir. Funksiyanın nöqtəsində və ar­qument­lərinə nəzərən **xüsusi artımları**



kimi təyin olunur.

**Tərif.** şərtində



nisbətinin sonlu limiti varsa, onda bu limitə funksiyasının nöqtəsində arqumentinə nəzərən **birinci tərtib xüsusi törəməsi** deyilir və



simvollarından biri ilə işarə olunur.

Tərifə əsasən



yaza bilərik.

Eyni qayda ilə arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməyə tərif verilir.



Oxşar qayda ilə 3 dəyişənli və daha çox dəyişənli funksiyaların xüsusi törəmələrinin tərifini də vermək olar.

Tərifdən aydındır ki, çoxdəyişənli funksiyanın bir arqumentinə nəzən xüsusi törəməsini hesabladıqda, onun digər dəyişənlərini sabit hesab etmək lazımdır. Buna görə də çoxdəyişənli funksiyaların xüsusi törəmələrini hesabladıqda birdəyişənli funksiya törəməsinin hesablanma qaydaların­dan və düsturlarından bilavasitə istifadə olunur.

**Misal** 1. funksiyasının birinci tərtib xüsusi törəmələrini tapmalı.



**Həlli:**



**Misal 2**. funksiyasının nöqtəsində birinci tərtib xüsusi törəmələrini hesablamalı.



**Həlli:** Əvvəlcə xüsusi törəmələri tapaq:



A nöqtəsinin koordinatlarını xüsusi törəmələrdə nəzərə alsaq,



olar.

**2. Çoxdəyişənli funksiyanın diferensialı**

Tutaq ki, funksiyası oblastında təyin olunmuşdur. bu oblastın hər hansı nöqtəsidir və , dəyişənləri uyğun olaraq elə və artımları alır ki,



nöqtəsi yenə də həmin oblasta daxil olur. Ondafunksiyası



(1)



artımını alır. (1) ifadəsinə funksiyasının nöqtəsində artımı (və ya tam artımı) deyilir.



**Tərif.**  funksiyasının nöqtəsində artımını



şəklində göstərmək mümkün olduqda, ona həmin nöqtədə **diferensiallanan funksiya** deyilir.

Burada və arqumentlərin və artımlarından asılı olmayan kəmiyyətlər, və isə şərtində sonsuz kiçilən funksiyalardır:



oblastının istənilən nöqtəsində diferensiallanan funksiyaya həmin oblastda diferensiallanan funksiya deyilir.



İkidəyişənli funksiyanın diferensiallanan olması haqqında verdiyimiz tərif uyğun şəkildə dəyişənli funksiyalar üçün də doğrudur.



**Teorem**. nöqtəsində diferensiallanan funksiyası həmin nöqtədə kəsilməyəndir.



**Teorem**. Verilmiş nöqtəsində diferensial­lanan funksiyasının həmin nöqtədə sonlu və xüsusi törəmələri var.



**Teorem.** Əgər ) funksiyası nöqtəsində diferensiallandırsa, onda həmin nöqtədə artımı (2)



şəklində göstərilir. ( sonsuz kiçilən kəmiyyətlərdir) (2) ifadəsinə ikidəyişənli funksiyanın tam artımının xüsusi törəmələrlə ifadəsi deyilir.



Əgər funksiya 3 dəyişənli olarsa, yəni şəklində olarsa, onda bu funksiyanın tam artımı



onun xüsusi törəmələrlə ifadəsi isə



şəklində olar. sonsuz kiçilən kəmiyyətlərdir. Bu qayda ilə istənilən dəyişənli funksiyanın tam artımı və onun xüsusi törəmələrlə ifadəsi düsturlarını yazmaq olar.



Tutaq ki, funksiyası diferensiallanan funksiyadır. Onda bu funksiyanın tam artımının xüsusi törəmələrlə ifadəsindəki cəminə ikidəyişənli funksiyanın tam **artımının baş hissəsi** deyilir.



funksiyasının tam artımının və arqument artımlarına nəzərən xətti olan baş hissəsinə, onun **tam diferensialı** deyilir və -lə, yaxud –lə işarə olunur.



və ya yazmaq olar.



Asılı olmayan dəyişənlərin diferensialları onların artımları ilə üst-üstə düşür, yəni



Onda

(3)



yazmaq olar.

Bu düstura ikidəyişənli funksiyanın tam diferensial düsturu deyilir.

Üçdəyişənli funksiyasının tam diferensialı



(4)



düsturu ilə hesablanır.

Bu qayda ilə istənilən dəyişənli funksiyanın tam diferensialının düsturunu yazmaq olar.

(2) ifadəsinin hissəsi artımlarına nəzərən yüksək tərtibdən sonsuz kiçilən kəmiyyətdir. Bu kəmiyyəti atsaq, təqribi bərabərliyini alarıq.



Bu ifadəyə ikidəyişənli funksiya diferensialının **təqribi hesablamaya** **tətbiqi düsturu** deyilir.

**Misal 3** funksiyasının tam diferen­sialını tapmalı.



**Həlli:** Xüsusi törəmələri tapaq:



(4) ifadəsinə görə



**Misal 4.** funksiyasının tam diferen­sialını tapmalı.



**Həlli:** Xüsusi törəmələri tapaq:



Beləliklə,



**Misal 5.** funksiyasının , nöqtəsindəki qiymətinə əsasən arctg (1,02/0,95)-i təqribi hesablamalı.



**Həlli:** z=arctg(y/) funksiyasının , nöqtə­sindəki qiyməti



olar. Funksiyanın tam artımını tapaq:



3. İkidəyişənli mürəkkəb funksiyanın xüsusi tö­rə­mələri

Tutaq ki, funksiyası və arqumentlərinə nəzərən diferensiallanan funksiyadır. Eyni zamanda və öz növbəsində hər hansı arqumentindən asılı diferensial­lanan funksiyalar olarsa, onda mürəkkəb funksiyası da diferensiallanandır və onun törəməsi



(5)



düsturu ilə tapılır. Bu ifadəyə mürəkkəb funksiyanın tam törəməsi deyilir.

Xüsusi halda və olarsa, onda funksiyasının tam törəməsi



(6)



düsturu ilə tapılır.

Əgər və y ikidəyişəndən asılıdırsa, yəni , olarsa, onda mürəkkəb funksiyasının xüsusi törəmələri



(7)



düsturları ilə hesablanır.

**Misal 6.** olduqda funksiyanın-yə nəzərən törəməsini hesablamalı.



**Həlli:** Aydındır ki,



olar. Onda z funksiyasının -yə nəzərən törəməsi (5) düsturu ilə



olar.

**Misal 7.** olduqda -i tapmalı.



**Həlli:**



(6) tam törəmə düsturuna görə



olar.

**Misal 8**. olduqda, mürək­kəb funksiyasının xüsusi törəmələrini tapmalı.



**Həlli:** Əvvəlcə verilmş funksiyasının xüsusi törəmə­lərini tapaq:



(7) düsturuna əsasən



yaza bilərik.

**4. Qeyri-aşkar funksiyanın törəməsi**

Əvvəlcə birdəyişənli qeyri-aşkar funksiyanın törəmə­sinə baxaq. Məlum olduğu kimi tənliyi ilə təyin olunan funksiyaya birdəyişənli qeyri aşkar funksiya deyilir. Qeyri aşkar funksiyanın aşağıdakı varlıq teoremini qeyd edək.



**Teorem.** Əgər funksiyası və onun , törəmələri nöqtəsinin daxil olduğu oblastda kəsilməyən funksiyalardırsa və ödənilirsə, onda



tənliyi hər hansı funksiyasını təyin edir və bu funksiyanın törəməsi üçün



(8)



bərabərliyi doğrudur.

**Misal 9**. funksiyasının törəməsini tapmalı.



**Həlli:**



tənliyi ilə verilmiş, -ə görə həll olun­mamış funksiyası ikidəyişənli **qeyri-aşkar** funksiya adlanır.



Əgər funksiyası , , dəyişənlərinə nəzərən diferensiallanandırsa və isə onda tənliyi ilə təyin olunan qeyri aşkar funksiyası da diferensiallanandır və onun xüsusi törəmələri aşağıdakı düsturlarla tapılır. (9)



Bu qayda ilə istənilən sayda dəyişəni olan qeyri aşkar funksiyanın xüsusi törəmələrini tapmaq olar.

**Misal 10.** tənliyi ilə verilmiş funk­siyasının xüsusi törəmələrini tapmalı.



**Həlli:** Aydındır ki, oldu­ğundan



(9) düsturuna əsasən



**5. Yüksəktərtibli xüsusi törəmələr**

Əvvəlcə oblastında təyin olunmuş ikidəyişənli funksiyasının yüksəktərtibli xüsusi törəmələrini təyin edək.



Aydındır ki, ikidəyişənli funksiyasının və xüsusi törəmələri də ümumiyyətlə və dəyişənlərinin funksiyalarıdır. Buna görə də onları xüsusi törəmələrindən danışmaq olar.



funksiyasının birtərtibli və xüsusi törəmələrinin və arqumentlərinə nəzərən törə­mələrinə funksiyasının ikitərtibli və ya ikinci xüsusi törəmələri deyilir və



kimi işarə olunur.

Funksiyanın ikitərtibli xüsusi törəmələrinin və arqumentlərinə nəzərən xüsusi törəmələrinə onun üçtərtibli və ya (üçüncü) xüsusi törəmələri deyilir və



kimi işarə olunur.

Bu qayda ilə istənilən tərtib xüsusi törəmələrə tərif vermək olar. Verilmiş funksiyaların müxtəlif arqumentlərə nəzərən alınmış yüksəktərtibli törəmələrinə onun qarışıq xüsusi törəmələri deyilir. İkidəyişənli funksiyasının iki və qarışıq xüsusi törəmələri var.



**Misal 11.** funksiyasının ikitərtibli xüsusi törəmələrini tapmalı.



**Həlli:**



Bu misaldan görünür ki, ikitərtibli qarışıq xüsusi törəmələrin ifadələri bərabərdir.

Təbii olaraq sual oluna bilər ki, istənilən funksiyaların ikitərtibli qarışıq xüsusi törəmələri biri-birinə bərabərdirmi?

Bu suala aşağıdakı teorem cavab verir.

**Teorem. (Şvars).** Əgər funksiyası və onun və xüsusi törəmələri nöqtəsində və onun müəyyən ətrafında təyin olunubsa və kəsilməyəndirsə, onda həmin nöqtədə



= )



münasibəti doğrudur.

Eyni qayda ilə dəyişənli funksiyasının ikitərtibli , üçtərtibli və s. xüsusi törəmələrinə tərif vermək olar.



**Misal 12.** funksiyasının ikitərtibli xüsusi törəmələrini tapmalı.



**Həlli:**



**Misal 13**. funksiyasının xüsusi törə­məsini **tapmalı.**



**Həlli:** Verilmiş funksiyanın iki dəfə -ə, sonra isə bir dəfə -ə görə diferensiallayaq:



**6. Yüksəktərtibli diferensiallar**

İki dəyişənli funksiyasının baxılan oblastda ikitərtibli kəsilməz xüsusi törəmələri olduqda, onun



(10)



diferensialının (buna funksiyanın birtərtibli diferensialı deyəcəyik) diferensialından danışmaq olar.

Funksiya diferensialının diferensialına həmin funksi­ya­nın ikitərtibli və ya **ikinci diferensialı** deyilir və və s. ilə işarə olunur. İkitərtibli diferensialı hesablamaq üçün və sərbəst dəyişənlərinin d və dy diferensial­larının sabit ədədlər olduğunu və həm də birtərtibli və ikitərtibli diferensiallar üçün eyni olduğunu qəbul edək. Onda (10) bərabərliyinin sağ tərəfi və –dan asılı funksiya olar. Diferensialın tərifinə görə



ikitərtibli diferensialın ifadəsini alarıq.Eyni qayda ilə funksiyanın üçtərtibli diferensialını da təyin etmək olar:



Funksiyanın (n-1) tərtibli diferensialının dife­rensialına həmin funksiyanın **n tərtibli diferensialı** deyilir və kimi işarə olunur: . Funksi­yanın tərtibli diferensialı üçün riyazi induksiya üsulu ilə



ifadəsi alınır.

Funksiyanın yüksəktərtibli diferensiallarını qısa şə­kildə də



kimi də yazmaq olar.

Çoxdəyişəndən asılı funksiyanın yüksəktərtibli diferensialları eyni qayda ilə təyin olunur.

**Misal 14.** funksiyasının ikinci tərtib tam diferensialını tapmalı.



**Həlli**:Verilmiş funksiyanın 1-ci və 2-ci tərtib xüsusi törəmələrini tapaq:



Beləliklə (2) düsturuna görə



yaza bilərik.

**Misal 15**. funksiyası üçün -i tapmalı.



**Həlli:** Verilmiş funksiyanın 1-ci və 2-ci tərtib xüsusi törəmələrini tapaq:



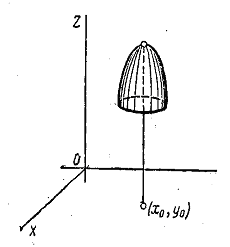
(11) düsturuna əsasən



olar.

**§ 20. Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu**

**1. Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu**



ф(*х*0, й0)

з=ф(*х*, й)

й

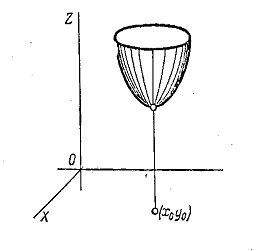
й0

х0

Tutaq ki, funk­siyası nöqtə­sinin ya­xın ətrafında təyin olun­muşdur.



**Tərif.** Əgərnöq­­­­tə­s­inin yaxın ətra­fındakı bü­tün nöqtələri üçün bə­rabər­izliyi ödə­nirsə, onda funk­siyası nöq­təsində mak­­si­um qiymət alır.



ф(*х*0, й0)

з=ф(*х*, й)

й

й0

*х*0



Bu halda - a funk­siyanın mak­simum qiy­məti, nöqtəsinə isə **maksi­mum nöqtəsi** deyilir.



**Tərif.** Əgər nöq­təsinin yaxın ətra­fındakı bütün nöq­tə­ləri üçün bərabər­sizli­yi ödəni­lərsə, onda funk­siyası nöqtəsində mini­um qiy­mət alır.



Burada -*a* funk­­­­siyanın mini­mum qiy­məti, nöqtəsi­nə isə onun **mini­mum nöqtəsi** de­yilir.



İkidəyişənli funk­siya­nın

maksimum və minimum qiymətlə­rinə onun **ekstremum** qiy­məti deyilir.

Qeyd etmək la­zım­dır ki, ikidəyişənli funk­siyanın da müəyyən oblastda bir neçə maksimumu və bir neçə minimumu ola bilər. Bu qiymətlər içərisində funksiyanın elə minimumu ola bilər ki, onun bəzi maksimumundan böyük olar. Ona görə də ikidəyişənli funksiyanın ekstremumuna nöqtənin yaxın ətrafında tərif verilir.

**Teorem. (Ekstre­mu­mun varlığının zəruri şərti)** Əgər diferensiallanan funksiyasının nöqtəsində ekstremumu vardırsa, onda həmin nöqtədə onun birinci tərtib xüsusi törəmələri sıfra bərabərdir. Yəni



(1)



olar. (1) bərabərlikləri ekstremumun zəruri şərtini ifadə edir. Hər iki birinci tərtib xüsusi törəmənin sıfra bərabər olduğu nöqtələrə ikidəyişənli funksiyanın stasionar (böhran) nöqtələri deyilir. Stasionar nöqtələri ikidəyişənli funksi­yanın ekstremum nöqtəsi olması üçün zəruri şərtdir, kafi deyil. Yəni hər bir stasionar nöqtəsində funksiyanın ekstremum qiymətlər aldığını demək olmaz. Ona görə də ikidəyişənli funksiyanın ekstremumunun olmasının kafi şərtini ifadə etmək üçün aşağıdakı işarələri qəbul edək:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

**Teorem**. Fərz edək ki, nöqtəsifunksiyasının stasionar nöqtəsidir və bu nöqtə ətrafında kəsilməyən xüsusi törəmələri vardır. Onda olduqda bu funksiya ekstremuma malikdir. (və ya ) olduqda funksiya M0 nöqtəsində maksimuma, (və ya ) olduqda funksiya M0 nöqtəsində minimuma malikdir. olduqda M0 nöqtəsində ekstremum yoxdur. olduqda isə ekstremumun olub-olmadığını təyin etmək üçün əlavə tədqiqat tələb olunur.



**Misal. 6**. funksiyasının ekstremu­mu­nu tapmalı.



**Həlli:** Verilmiş funksiyanın stasionar nöqtələrini tapaq.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Deməli böhran nöqtələri olar



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |

Onda .



nöqtəsində funksiya ekstremum qiymət almır. nöqtəsində yoxlayaq.



olduğundan funksiya nöqtəsində ekstremum qiymət alır.



olduğundan nöqtəsində funksiya minimum qiymət alır.



**§ 21. Səthə toxunan müstəvi və normal.**

**İstiqamət üzrə törəmə.Qradiyent.**

**İkidəyişənli funksiya üçün Teylor düsturu**

**1. Səthə toxunan müstəvi və normal**

Aşkar tənliyi ilə verilmiş səthinə nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyi



nöqtəsindəki normalın tənliyi



şəklindədir. nöqtəsindən keçib, bu nöqtədə səthə toxunan müstəviyə perpendikulyar olan düzxətt səthin nöqtəsindəki **normalı** adlanır.



Səth qeyri-aşkar şəkildə tənliyi ilə verildikdə, bu səthə nöqtəsindəki toxunan müstəvinin tənliyi



normal düzxəttin tənliyi isə



kimi yazılır.

səthinin üzərində yerləşən və



tənliklər sistemini ödəyən nöqtəyə səthin məxsusi nöqtəsi deyilir. Məxsusi nöqtədə səthə toxunan müstəvi və normal yoxdur.

Eyni qayda ilə müstəvi əyrisinin məxsusi nöqtəsi, koordinatları



tənliklər sistemini ödəyən nöqtəsinə deyilir. Məxsusi nöqtələri növlərə ayırmaq üçün əvvəlcə



ikinci tərtib xüsusi törəmələrinə əsasən kəmiyyətini hesablayırlar.



Əgər

1) olarsa, məxsusi nöqtə **izolə** edilmiş,



2) olarsa, **məxsusi nöqtə düyün**,



3) olarsa, məxsusi nöqtə 1-ci və ya 2-ci növ **qayıdış** nöqtəsi, **izolə** edilmiş nöqtə, **öz-özünə toxunma** nöqtəsi ola bilər.



**Misal 1.** nöqtəsində səthinə toxunan müstəvinin və normalın tənliyini yazmalı.



**Həlli:** Verilmiş funksiyanın xüsusi törəmələrini və onların nöqtəsində qiymətlərini hesablayaq:



Toxunanın tənliyi



olar.

Normalının tənliyi



olar.

**Misal 2.** yarımsferasına nöqtəsində toxunan müstəvi və normalın tənliyini yazmalı.



**Həlli**: Verilmiş funksiyanın xüsusi törəmələri.

və



nöqtəsində və onun ətrafında kəsilməyən olduğundan həmin nöqtədə funksiyası diferen­sialla­nan­dır. Buna görə də səthin nöqtəsində toxunan müstəvisi və normalı var.



və



olduğundan nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyi



həmin nöqtədə səthin normalının tənliyi isə



və ya olar.



**2. İstiqamət üzrə törəmə. Qradiyent**

funksiyasının nöqtəsində , vektoru istiqamətində törəməsi



limitinə deyilir.

Əgər funksiyası diferensiallanandırsa, onda onun istiqaməti üzrə törəməsi



düsturu ilə hesablanır. Burada α ilə vektorunun absis oxunan müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq işarə olunmuşdur.



Üçdəyişənli funksiyasının vahid uzunluqlu vektoru istiqamətində törəməsi



düsturu ilə təyin olunur. Burada α, β, γ bucaqları -in uyğun olaraq OX, OY, OZ oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlardır.



Funksiyanın törəməsi onun dəyişmə sürətini göstərir. Buna görə də çoxdəyişənli funksiyanın verilmiş nöqtədə istiqamətində törəməsinə, onun həmin nöqtədə istiqaməti üzrə dəyişmə sürəti kimi baxmaq olar. Funksiyanın müxtəlif istiqamətlərdə dəyişmə sürəti, ümumiyyətlə eyni olmur.



Bir çox məsələlərin həllində bəzən baxılan funksiyanın ve­rilmiş nöqtədə ən böyük sürətlə artma istiqamətini tap­maq tələb olunur. Bu məsələ aşağıdakı kimi tədqiq edilir.

funksiyasının nöqtəsiindəki qradi­yenti dedikdə, koordinatları funksiyasının xüsusi törəmələri olan vektor başa düşülür və



kimi işarə olunur. Burada müstəvi üzərindəki ortanormal bazisdir.



Üçdəyişənli fueksiyasının qradiyenti



kimi yazılır.

Funksiyanın nöqtəsində müxtəlif istiqamətlər üzrə törəmələrindən ən böyüyü, bu nöqtədəki qradiyent istiqamətində olan törəmədir.



Deməli, diferensiallanan funksiya verilmiş nöqtədə öz qradiyenti istiqamətində ən böyük sürətlə artır və bu dəyişmə sürətinin ən böyük qiyməti qradiyentin moduluna bərabərdir.

**Misal 4.** funksiyasının nöqtəsiində absis oxu ilə 600-li bucaq əmələ gətirən vektoru istiqamətində törəməsini tapmalı.



**Həlli:** funksiyasının xüsusi törəmələrinin nöqtəsində qiymətlərini taparıq:



**Misal 5.** və N(5; 4;2) nöqtələri verildikdə funksiyasının nöqtəsində vektoru istiqamətində törəməsini tapmalı.



**Həlli:** vektorunun koordinatlarını və yönəldici kosinuslarını tapaq:



Beləliklə,



**Misal 6.** funksiyasının nöqtə­sində qradiyent istiqamətində törəməsini tapmalı.



**Həlli:** Burada vekoru ilə üst-üstə düşür.



Aydındır ki,



**3. İkidəyişənli funksiya üçün Teylor düsturu**

Birdəyişənli funksiyalar üçün məlum olan Teylor düsturu uy­ğun şəkildə çoxdəyişənli funksiyalar üçün də doğrudur. Bunu, sadəlik xatirinə, ikidəyişənli funksiyalar üçün gös­tərməklə kifayətlənək.

Birdəyişənli funksiyalar üçün Teylor düsturu və onun qalııq həddi müxtəlif şəkillərdə yazılır. Burada həmin düsturun

(1)



şəklində yazılışından istifadə olunur.

Fərz edək ki, ikidəyişənli funksiyası nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdur və tərtibə qədər kəsilməyən bütün xüsusi törəmələri var. Burada *x* və dəyişənlərinə elə və artımları verək ki, alınan nöqtələr yenə də nöqtə­sinin göstərilən ətrafına daxil olsun. Onda istənilən üçün



və



dəyişənlərindən asılı

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

funksiyasına baxmaq olar. Birdəyişənli ϕ(t) funksiyası *x* və dəyişənləri vasitəsilə -nin mürəkkəb funksiyasıdır. Belə təyin olunmuuş birdəyişənli funksiyasının nöqtəsi ətrafında tərtibə qədər bütün törəmələri var və onun üçün (1) düsuturu yazmaq olar:



|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

burada və



İndi və funksiyası vasitəsilə ifadəsini tapaq.



(2) bərabərliyindən

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

olması aydındır. kəmiyyətlərinin vasitəsilə ifadə etmək üçün nəzərə almaq lazımdır ki, və dəyişənləri -dən xətti asılıdır və buna görə də –nin yüksəktərtibli difirensialları



düsturu ilə hesablanır.

Burada olduqda və olduqda olduğunu nəzərə aldıqda



|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |
|  | (6) |

olur. (4), (5) və (6) bərabərliklərinə əsasən (3)-dən alırıq:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |
|  | (8) |

(8) (və ya (7)) bərabərliyinə ikidəyişənli funksiyası üçün Teylor düsturu deyilir. Bərabərliyin sağ tərəfindəki



həddi Teylor düsturunun **Laqranj şəklində qalıq** həddi adlanır.

Teylor düsturunu başqa şəkildə də yazmaq olar. Bu məqsədlə ( sərbəst dəyişən olduğu üçün), və olduğunu nəzərə almaq lazımdıır. Onda (7) düsturunu



|  |  |
| --- | --- |
| + | (9) |

kimi yazmaq olar.Xüsusi halda, və olduqda (9) düsturu



(10)



şəklində yazılır. Bu bərabərliyə çox zaman funksiyası üçün Makloren düsturu deyilir.

